ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 32 | Oktober | Heft 10

Über HAMELS Bedeutung für die Mechanik

Ansprache zu seinem 75. Geburtstag im Seminar für Mechanik der Technischen Universität Berlin

Von *W. Kucharski* in Berlin

In den nächsten Wochen vollendet Georg Hamel sein 75. Lebensjahr. Mit unverminderter Frische, in reger Tätigkeit, von Unheil und Krankheit nur vorübergehend behindert, überschreitet er die Grenze zum hohen biblischen Alter; die letzten fünf Jahre haben uns noch den inhaltsreichen und gewichtigen Block seiner ,,Theoretischen Mechanik" beschert und, neben manchem anderen, die an die Grenzen der Erkenntnis vorstoßende Arbeit über den Punkt. Man weiß, daß weitere umfassende Werke zu erwarten sind; alles nicht nur einfache Zusammenstellungen von früheren Ergebnissen, sondern erneut gesiebt, gesteigert und von dem wachsenden Licht eines universellen, aufhellenden Geistes durchstrahlt. Dabei ist er in allem seiner ursprünglichen Eigenart treu geblieben; er schafft aus seinem Inneren heraus, stellt seine eigenen, originalen Probleme und löst sie mit souveräner Beherrschung der vorhandenen oder, wenn sie nicht ausreichen, unter Entwicklung neuer Methoden und Wege. In seinen wichtigsten Arbeiten eilt er seiner Zeit um Jahrzehnte voraus, in manchen, soweit es der Vortragende zu beurteilen vermag, um noch größere Zeitspannen.

So geschieht es ihm, daß er in doppelter Beziehung ,,historisch" geworden ist, wie er selbst in einer kürzlichen Besprechung humorvoll andeutete. Man weiß, es ist bekannt, daß er ,,bedeutend" ist; aber viele seiner Einzelarbeiten liegen weit zurück; er hat die Probleme früh und selbständig, ohne Rücksicht auf Zeit- und Modeströmungen aufgegriffen und umfassend sowie mathematisch streng bearbeitet; erst geraume Zeit später tauchen verwandte Fragestellungen in dem laufenden Wissenschaftsgetriebe auf, man konzentriert sich auf Einzelfragen; beantwortet sie zum Teil nach den Bedürfnissen des Tages, weniger umfassend, weniger genau, womöglich unvollkommen, und beachtet nicht, daß vor Jahrzehnten eine Arbeit Hamels erschienen ist, in der das Wesentliche des Gesuchten und meistens noch eine ganze Menge weiteres enthalten ist. Der Stein ist durch ihn ins Rollen gekommen oder erheblich vorwärts getrieben, aber er wird häufig nicht zitiert. Bei anderen seiner Arbeiten — hierbei hat der Vortragende hauptsächlich Hamels fast einzig dastehende Bemühungen um die Klärung der Grundlagen der Mechanik im Auge — kann man sich des Eindrucks nicht erwehren, daß (jedenfalls in breiten Schichten) die Zeit noch nicht reif für seine Auffassungen ist; so erlebt er am eigenen Leibe die Wahrheit jenes Goethewortes, wonach auch der bedeutendste Geist sein Jahrhundert nicht verändern, wohl aber günstige Wirkungen vorbereiten kann.

Es sei gestattet, das Angedeutete und noch einiges andere an einigen Beispielen näher auszuführen. Dabei ist Vollständigkeit weder angestrebt noch mit Rücksicht auf den verfügbaren Raum und auf die naturgegebenen Beschränkungen und Neigungen des Vortragenden möglich.

Über das Schwerependel mit oszillierendem Drehpunkt ist bis in die letzte Zeit viel gearbeitet worden; eine vor kurzen Monaten veröffentlichte Literaturzusammenstellung enthält 12 Veröffentlichungen, darunter eine von 1907 von Stephenson (die dem Vortragenden leider nicht zugänglich war). Als älteste deutsche Arbeit zu diesem Thema erscheint eine aus dem Jahre 1930, deren teilweise Unzulänglichkeit heute allgemein bekannt sein dürfte. Dagegen ist die grundlegende Arbeit Hamels zu diesem Thema (Mathematische Annalen 1913(!)), ,,Über die lin. Diff.-Gl. 2. O. mit periodischen Koeffizienten", überhaupt nicht erwähnt! Zu jenem frühen Zeitpunkt wurde H. durch eigene Beobachtung eines Akrobaten zur Behandlung jenes Problems angeregt; er veröffentlichte hierzu einen Aufsatz von 41 Seiten, der eine Fülle wichtiger Sätze und weitreichender Anregungen enthält, die auch heute nicht ausgeschöpft sein dürften. Etwa 6 Jahre später, ebenfalls in den Annalen, befaßt sich O. Haupt mit der Mathematik der Sache, wobei die Ergebnisse Hamels mit einer unwesentlichen Ausnahme bestätigt werden.

Ähnlich liegt es mit Hamels Arbeit über nichtlineare Schwingungen (Math. Annalen 1922), in welcher er unmittelbar an die Duffingschen Ergebnisse anknüpft und sie ebenfalls in einer Allgemeinheit und mit einer Anzahl weiterer Anregungen erweitert, die mit der späteren

Entwicklung im engsten Zusammenhang steht, ihr z. T. vorgreift und noch manche Keime für neue Möglichkeiten enthält. (In diesem Zusammenhang darf vielleicht erwähnt werden, daß die einfachen, aber alles Wesentliche zeigenden Modelle und Apparate, die Duffing im hiesigen Institut für Mechanik zur Zeit des Vorgängers des Vortragenden, Eugen Meyer, hergestellt und benutzt hatte, bis 1945 vorhanden, in Ehren gehalten und gelegentlich benutzt wurden.)

Als eine der geistvollsten und auf ihrem Gebiet bedeutendsten Einzelarbeiten Hamels ist dem Vortragenden stets diejenige „Über die ebene Bewegung eines unausdehnbaren Fadens“ (Mathem. Annalen 1942) erschienen, die geraume Zeit vorher „in statu nascendi“ in unserem Seminar von ihrem Autor vorgetragen wurde. Hierin wurde erstmalig an einem besonders interessanten Fall das eigentümliche Verhalten eines Seiles verständlich gemacht, das z. B. an einem Ende von einer Querkraft ergriffen wird. Die maßgebende Rolle der dabei auftretenden und mathematisch in der komplizierten Natur der Differentialgleichungen (mit ihren durch die Längenkonstanz begründeten Singularitäten) liegenden Unstetigkeiten wurde intuitiv erkannt und mathematisch streng herausgearbeitet, wobei gleichzeitig eine auch für die Anwendung wichtige Eigentümlichkeit bezüglich der Randbedingungen erkannt und allgemein begründet wurde. Dies ist nicht nur ein „Denksport gehobener Art“; es ist die überlegene Leistung eines originalen Geistes, der den bis dahin kaum verständlichen Paradoxien eines auch technisch nicht unwichtigen Grundelementes der Mechanik spürend nachgeht, die Verhältnisse klarlegt und weiteren Forschungen von unmittelbar nützlicher Bedeutung den Weg ebnet. Dies konnte nur in einer Zeit übersehen werden, in welcher der Blick überwiegend auf die äußere, womöglich sofortige Anwendbarkeit und Nützlichkeit gerichtet war, in welcher sogar Forscher von ausgesprochen innerlicher und grüblerischer Eigenart jener einseitigen Einstellung ihren Tribut zahlen mußten, und in welcher zum mindesten die Gefahr bestand, daß der unlösliche Zusammenhang zwischen der sogenannten Zweck- und der Grundlagenforschung zerrissen wurde. Man sollte nicht vergessen, daß die Menschheit im Grunde von den freien Einfällen und Schöpfungen ihrer selbständigen und freien Köpfe lebt.

Damit ist der Übergang hergestellt zu einer kurzen Würdigung derjenigen Leistungen Hamels, die nach Ansicht des Vortragenden seine Hauptbedeutung für die Zukunft sicherstellen. Es wird heute auch dem Fernstehenden deutlich erkennbar, daß der „Zeitgeist“, in dessen über Jahrhunderte erstreckten Cyklen das menschliche Geschehen pulsiert und kreist, mit wachsender Intensität begriffen ist, sich von jener fast ausschließlichen Betonung des Äußeren, der sogenannten äußeren und fsat allein anerkannten Realität, ab- und der sicherlich ebenso wichtigen und ebenso realen inneren Welt des Menschen zuzuwenden. Um die Jahrhundertwende wandte sich die Mathematik zu einer steigenden und an Bedeutung wachsenden Untersuchung ihrer Grundlagen, und die vielfach nur auf das Objekt gerichtete, nur die einfachste, äußere Realität anerkennende Physik mußte erleben, daß ihre mit Konsequenz vorgetriebenen experimentellen Bemühungen sie vor Fragen stellten, die mit ihren bisherigen Denk- und Auffassungs-Methoden nicht zu bewältigen waren. Dies ist uns heute deutlicher als zu Anfang des Jahrhunderts, und daher kann es auch erst heute weiteren Kreisen sichtbar werden, was es bedeutete, als damals schon, zu Beginn des Jahrhunderts, der junge Professor an einer technischen Hochschule mit großartiger Selbstverständlichkeit eine allgemeine Mechanik entwickelte und vortrug, in welcher die Gesetze und Begriffe weder als fast zufällig gewonnene Formeln und Rechengrößen, noch als bloße Konventionen oder Spielregeln, noch als einfache Ergebnisse äußerer Erfahrung erscheinen, die ja an sich bereits eine ordnende und zusammenfassende Funktion des Subjekts voraussetzt, sondern als Formulierungen, die den Notwendigkeiten, Fähigkeiten und Möglichkeiten unseres Denkens in der Auseinandersetzung mit den Naturvorgängen entspringen, also m. a. W. sowohl äußere als auch innere Elemente enthalten. So gelingt es ihm, die u. a. von Hertz hervorgehobenen und z. B. bei Kirchhoff besonders kraß erscheinenden Schwierigkeiten in den Grundlagen der Mechanik zu beseitigen und dieser grundlegenden Wissenschaft eine Basis zu geben, in welcher jeder Begriff, jede Beziehung klar und in gewissem Sinne einfach herausgearbeitet wird, das alles in einer Sprache, die auch den anspruchsvollen Leser entzückt und stellenweise in ihrer prägnanten Kürze dem konzisen Englisch, in ihrer natürlichen Eleganz dem Französisch zu vergleichen ist. Der Standpunkt des Autors ist dabei naturgemäß derjenige der strengen Wissenschaftlichkeit, Mathematik und Logik sind maßgebend, ferner ist alles auszuschließen, was nicht unbedingt notwendig ist, insbesondere alle Anthropomorphismen, die über die gegebenen Notwendigkeiten und Möglichkeiten unseres Denkens hinausgehen. Diese Klärung wird dadurch möglich, daß der Autor sich konsequent von den Hauptergebnissen Kants leiten läßt, ohne deren Anerkennung auch nach Auffassung des Vortragenden alle Versuche zur Klärung unserer Erkenntnisse und Auffassungen vergeblich, zum mindesten unvollständig bleiben müssen; der Farbblinde hat eine andere Welt als der Normale, der einfache Schwarzweißfilm gibt Farben und Töne nicht wieder, und daß wir einen Kreidehaufen nicht zu einer sechseckigen Scheibe, auch nicht zu einem Ellipsoid, sondern zu einem Punkt „idealisieren“, ist weder ein

Zufall noch ein Ergebnis irgendeiner Erfahrung, sondern beruht auf einer ,,vor allem anderen" (a priori) vorhandenen Eigenschaft unseres Geistes.

Daß die in dieser Weise resultierenden Auffassungen heute noch nicht gerade populär geworden sind, kann nicht verwundern. Unsere Kenntnisse vom Wesen des Menschen sind sehr gering und dürftig, die Unbewußtheit weitester Kreise erschreckend, die Philosophie in Einzelprobleme zersplittert oder in wenig präcise Verallgemeinerungen aufgelöst. Bei dieser Sachlage ist es vielleicht erlaubt, daß der Vortragende kurz darlegt, wie sich ihm die Verhältnisse und Tatsachen z. B. bezüglich des viel diskutierten Kraftbegriffes in der Mechanik darstellen, worüber er in den dreißiger Jahren bei einer Berliner Tagung vorgetragen hat; leider ist ihm alles Material hierüber verlorengegangen. Danach sind in der Entwicklung einer Wissenschaft wie der Mechanik drei wesentliche Phasen zu unterscheiden, wenn man von den allzu unbestimmten, kaum zu präzisierenden Frühansätzen absieht. Man kann verfolgen, wie in den Jahrhunderten vor Galilei und Newton eine noch unbestimmte Vorstellung sich entwickelt und immer stärker in den Vordergrund drängt, daß bei der ,,Bewegung" eine Kraft, ein ,,Agens" wirksam sein muß, und zu jenen Zeiten wird bereits diese Formulierung als etwas Wesentliches empfunden und, z. B. bei Leonardo da Vinci, mit Begeisterung gepriesen. Dies wäre die erste Phase, in welcher eine mögliche und notwendige Formulierung des menschlichen Inneren mit wachsender Kraft hervortritt und zur Anwendung, Präzisierung, in gewissem Sinne zur Realisierung, drängt. Aber dabei kann es nicht bleiben. Alles strebt nach weiterer Bestimmtheit, der Verstand verlangt nach mathematischer und logischer Formulierung: wie, in Zahlen angebbar, äußert sich die Kraft, welches sind die maßgebenden Daten der Bewegung? Man mußte Bewegung genau studieren; dem damaligen Menschen lag noch der Himmel mindestens ebenso nahe wie die Maschinen auf der Erde; Kepler findet seine (nach heutigen Begriffen) rein phoronomischen Gesetze. Dann experimentiert Galilei auf der Erde mit verlangsamten Fallbewegungen; er findet mit erstaunlicher Intuition die Beschleunigung als maßgebend. Newton vereinigt alles, schafft sich die notwendige Mathematik und stellt sein Gesetz auf. Dies die zweite Phase; das Ziel der ersten ist in gewisser Weise erreicht; die Ergebnisse sind weittragend; die Einzelergebnisse überstürzen sich, und nicht nur die Tendenz, die Kraftvorstellung unterzubringen, ist erfüllt; bald werden die anderen Notwendigkeiten menschlicher Erkenntnis, vor allem diejenige einer an sich konstant bleibenden, nur in ihren Erscheinungsformen veränderlichen Größe, also der Energievorstellung, in der neuen Wissenschaft erfüllt; man findet die Erhaltungssätze der Energie und der Impulsgrößen. Sogar eine zunächst unbestimmte Formulierung von fast teleologischer Art (Maupertius) wird von Euler und Späteren sauber herausgearbeitet; es erscheint wahrhaft erstaunlich, was die neue Wissenschaft alles leistet. Die meisten bisherigen Bemühungen bis in die unmittelbare Gegenwart gehören im wesentlichen zu dieser zweiten Phase, in der man sich der Ergebnisse erfreut, sie immer weiter ausbaut, die Ursprünge vergißt oder beiseite schiebt. In neuerer Zeit befaßt sich (nicht nur für die Mechanik) eine steigende Anzahl von Arbeiten mit der ersten Phase; die moderne Psychologie, nach Ansicht des Vortragenden vor allem durch C. G. Jung-Zürich entwickelt, der auch bei uns immer mehr ,,einsickert", ohne genügend studiert und zitiert zu werden, hat hierfür Erkenntnisse von größter Tragweite gewonnen, deren Auswirkung noch gar nicht abzusehen ist. Dem engen Nur-Mathematiker ist dies heute noch vielfach unsympathisch; er hört nicht gern von Psyche, geschweige denn von dem deutschen Wort ,,Seele", aber auch er wird sich dem nicht verschließen können, daß Mathematik, Logik, Denken, nur einige von den Funktionen des menschlichen Inneren sind, und daß sogar die Mathematik verkümmern würde, wenn es anders wäre, denn auch sie lebt von den Ergebnissen der Intuition ihrer Großen, von der emotionalen, gefühlsmäßigen Hingabe an ihre Tätigkeit und der freudigen Empfindung über die ästhetische Schönheit der Ergebnisse.

Doch nach der ersten und zweiten Phase hat die dritte eingesetzt, mit der sich Hamel in diesem Zusammenhang befaßt. Es entsteht — fast zwangsläufig — die Frage: Was bedeuten nun eigentlich die gefundenen Gesetze und deren Begriffe, vom Standpunkt der strengen Wissenschaftlichkeit gesehen? Was ist z. B. von diesem Standpunkt beurteilt, die Kraft im Newtonschen Gesetz? Ist dieses, wie z. B. Kirchhoff behauptete, nichts weiter als eine Identität? (Hier erscheint etwas Ähnliches wie bei dem 80jährigen Russel, der nach Zeitungsnachrichten dem Radiopublikum erzählt hat, Mathematik wäre die Kunst, dasselbe auf andere Weise zu sagen, ohne allerdings dabei aufzuklären, wie in dieser Weise z. B. das erstaunliche Gebäude der Theorie der analytischen Funktionen entstehen kann!). Soweit geht die Entzauberung der ersten Phase nicht, aber in gewisser Weise tritt sie doch ein: Die Kraft entpuppt sich als das jeweilige Gesetz für die Massenbeschleunigung, sie ist ein ,,Gedankending" geworden. Wenn gravitierende Körper vorhanden sind, so kann man für die Massenbeschleunigung einen Ausdruck angeben, der die Lagenkoordinaten und die Massen der Körper enthält; ist eine Feder deformiert, so hat eine mit ihrem losen Ende verbundene Masse eine ganz bestimmt, aus den Federdaten folgende Beschleunigung; liegen gleichzeitig mehrere solcher ,,Kraftquellen" vor, so gilt das Gesetz vom

Parallelogramm der Kräfte, das weder als selbstverständlich noch als allein möglich erscheint; es wird beweisbar erst mit gewissen Voraussetzungen, die allerdings so einfach und natürlich erscheinen, daß man heute, nachträglich, nicht verwundert ist, daß man für die erste Mechanik dieses erste einfachste Gesetz fand. (Daß man auch anders denken und formulieren kann und muß, zeigt die sogenannte Relativitätsmechanik). Auch mit der Kausalität ist etwas Unvorhergesehenes passiert; man kann nicht von einer Seite der das Gesetz formulierenden mathematischen Gleichung sagen, sie wäre die Ursache der anderen Seite; die Denkweise, nach welcher die Kraft die Ursache der Beschleunigung ist, wird sinnlos. Wohl aber ist das jeweilige Kraftgesetz aus der jeweiligen Gesamtanordnung zu erschließen, und so ist die Feder mit ihrer Deformation eine Ursache der Kraft. Doch dies ist eine „causa cognoscendi", in welche sich in gewisser Weise die in der ersten Phase der Entwicklung gesuchte „causa fiendi" gewandelt hat. Danach wird es fast selbstverständlich, daß bei der Einführung starrer Körper auch neue Kraftgesetze aufzustellen sind; mit der Deformationsmöglichkeit ist jede Erkennbarkeit elastischer Kräfte verloren gegangen; so kommt man auf die durch Einschränkungen der Beweglichkeit entstehenden Reaktionskräfte. Auch die Masse hat ihre ursprüngliche Bedeutung verloren; sie wird durch eine Zahl ausgedrückt, die dem betreffenden Körper zugeordnet ist; wie sich dieser Begriff aus den zunächst einfachsten Denkelementen aufbaut, muß in der „Elementaren Mechanik" nachgelesen werden; eine einigermaßen ausführliche und verständliche Darlegung aller wichtigen Züge der Hamelschen Mechanik würde eine ganze Anzahl selbständiger Arbeiten erfordern.

Eine wesentliche Erkenntnis, deren Tragweite auch heute noch nicht allgemein durchgedrungen sein dürfte, sei noch hervorgehoben: Die Begriffe innerhalb eines Gesetzes haben nicht selbständige Bedeutung; sie erhalten diese erst durch den Zusammenhang, durch die Beziehungen, die ihnen das Gesetz gibt. Ein für die Mechanik oder für die theorethische Physik überhaupt sinnvoller und für sich aufgestellter Massenbegriff existiert ebensowenig wie eine für sich aufgestellte Raum-, Zeit-, Energie- oder Impuls-Größe. Das alles gibt es nur im Rahmen der betreffenden Gesetze. Bei deren Aufstellung wird gewißermaßen vorausgesetzt, daß solche Dinge gefunden werden können, oder es wird postuliert, daß sie im Zusammenhang mit dem betreffenden Gesetz gefunden werden mögen. So kommt Hamel zu der lapidaren Formulierung, daß die Festlegung dieser Dinge an das Ende der jeweiligen Wissenschaft gehört und nur auf Grund der ihr imanenten Gesetze erfolgen kann; er zeigt nicht nur, daß dies logisch nicht anders sein kann, sondern daß es z. B. in der klassischen und in der allgemeinen relativistischen Mechanik auch so geschehen ist. Man kann z. B. aus den Bewegungsgesetzen für zwei Körper die Zeit eliminieren und erhält so die Lage des einen, bezogen auf diejenige des anderen, und genau dies ist das Prinzip unserer (klassischen) Zeitbestimmung mit Hilfe von Sonne und Erde.

Andere wichtige Züge der Hamelschen Mechanik können hier nur mit äußerster Kürze aufgezählt werden. Die künstliche Konstruktion des „Punkthaufens" erweist sich als unnötig; hiermit verschwindet nicht nur „eine intellektuelle Unsauberkeit", sondern, wie der Vortragende aus eigener Erfahrung bezeugen kann, ein erheblicher Stein des Anstoßes für die Anschauung; ihm ist es nie möglich gewesen, den starren Körper als einen Punkthaufen zu sehen. Für den Pädagogen verschwindet dadurch auch die unselige Scheidung der „Festigkeitslehre", in welcher es mit dem Punkthaufen doch nicht geht, von der übrigen Mechanik. Nach Ansicht des Vortragenden ist auch der unselige Punkthaufen weitgehend für die bemerkenswerte Verwirrung der Geister verantwortlich zu machen, die auch heute noch, den aufklärenden Bemühungen Hamels und anderer zutrotz, bezüglich des Prinzips von d'Alembert in erstaunlich weiten Kreisen herrscht, freilich nicht der Punkthaufen allein, wie die auf ihm aufgebaute Mechanik Boltzmanns zeigt. Der Vortragende ist davon überzeugt, daß die späteren Geschlechter als eines der vielen Symptome für die Zerrissenheit unserer Zeit die Tatsache ansehen werden, daß in diesem „Zeitalter der Technik" eines ihrer frühesten und wichtigsten physikalischen Gesetze zu einer inhaltlosen Trivialität verwässert wurde, ohne daß man sich der Verhöhnung bewußt wurde, die man hierdurch nachträglich jenem bedeutendem Manne antat. Bei der verbreiteten Interesselosigkeit für derartige Dinge ist es auch nicht weiter bekannt geworden, daß Hamel diesem Gesetz eine Grundlage gegeben hat, aus der es zu beweisen ist, und die besonders deutlich erkennen läßt, wie auch diesem Prinzip das Streben nach der einfachsten Denkmöglichkeit zugrunde liegt.

Die Gründlichkeit der Hamelschen Gedankengänge wird u. a. durch eine dem Vortragenden besonders interessante aber wohl weniger beachtete Einzelheit bestätigt: die Tatsache, daß die Reaktionskraft bei Abwesenheit von Reibung in die Normale der Berührungsfläche fallen muß, wird aus dem Satz vom zureichenden Grunde bewiesen („Elementare Mechanik"), einer der vielen „Beweise" dafür, daß unsere Naturgesetze (und noch vieles andere) in wesentlichem Maße auf den Möglichkeiten und Notwendigkeiten unseres Denkens beruhen, also aus vorgegebenen inneren Quellen fließen.

Diese höchst unvollständige und willkürliche Aufzählung und Besprechung der Hamelschen Leistungen, die ganz wichtige Kapitel z. B. der „Theoretischen Mechanik" unerwähnt läßt,

muß hiermit an dieser Stelle beendet werden. Man wird es auch dem Vortragenden nicht verübeln, wenn er stellenweise fast grob vereinfacht, popularisiert hat, handelt es sich hier ja nicht um scharfe Einzelstudien sondern um allgemeine Hinweise für weite Kreise.

Man wird nun vielleicht fragen, was mit jener dritten Phase der Erkenntnis erreicht ist. Wird nicht unsere Mechanik dadurch zu sehr abstrahiert? Nun, es wäre sicher ein großer pädagogischer Fehler, wenn man in dieser Weise dem Neuling die Mechanik beibringen würde; auch hier wird man mit Recht dem biologischen Prinzip folgen, daß das Individuum in vielem die Entwicklungsstadien der Art durchzumachen hat. Aber von einem gewissen Stadium ab wird es auch dem gebildeten Ingenieur und vor allem auch dem Physiker nicht schaden, sondern im höchsten Maße nützen, wenn er lernt, was seine Wissenschaft eigentlich „bedeutet", und der an der Spitze der Entwicklung befindliche Forscher wird sich solchen an die Wurzel der Dinge greifenden Methoden nicht entziehen können, wofür die heutigen Bemühungen in der theoretischen Physik den unmittelbaren Beweis erbringen. U. a. wird man dann auch der sicherlich merkwürdigen Gesamtlage entgehen, bei der einerseits die Mathematik und damit doch wohl auch die auf ihr beruhende Physik zu einer Art Tautologie herabgewürdigt wird, die auf geheimnisvolle Weise z.B. die Beherrschung der Atomenergie in greifbare Nähe gerückt hat, während andererseits sozusagen jeden Augenblick von irgendeiner Revolution in der Physik und dem Umsturz irgendeines Weltbildes erzählt wird. Die Möglichkeiten des menschlichen Geistes sind noch lange nicht alle bekannt, geschweige denn ausgenützt; sollte man nicht diese Hälfte menschlicher Erkenntnis mit mehr Ruhe und Hingabe, als es früher üblich war, studieren und von vornherein in Rechnung stellen? Vieles deutet darauf hin, daß dies bereits geschieht. Wenn man dann noch, wie es fast unvermeidlich ist, und wofür die Merkmale ebenfalls bereits sichtbar sind, erkennt und berücksichtigt, daß der Intellekt nicht die einzige Funktion des menschlichen Inneren ist, so befindet man sich, von allen Einzelheiten abgesehen, auf gutem Wege.

Zum üblichen Abschluß einer Ansprache bei einer solchen Gelegenheit sei es dem Vortragenden gestattet, den Wunsch zu wiederholen, den er vor fünf Jahren Georg Hamel zugerufen hat: Man kann dem ernsthaften Manne kaum Glück wünschen; man weiß kaum, was das ist. Wohl aber kann man ihm — und uns — noch für möglichst viele Jahre das wünschen, was der auch von ihm immer wieder angeführte Goethe in einer seiner fruchtbarsten Perioden als wesentlich erkannt und mit einem auch bei diesem Dichter ungewöhnlich schönen Ausdruck formuliert hat: „Die klingende Existenz zwischen Behagen und Unbehagen!" Daß hierbei das „Unbehagen" immer weniger werden möge, wollen wir menschlich-freundlich mit warmem Wunsche hinzufügen.

Über den Parametereinfluß auf einfache nichtstationäre Bewegungen

Von *W. Bader* in Berlin-Lichtenberg

In den linearisierten Bewegungsgleichungen eines starren Körpers im widerstehenden Medium werden die Eulerschen Winkel und der Geschwindigkeitsvektor als abhängige Variable eingeführt. Die Anwendung der einseitigen Laplace-Transformation zeigt, daß einfache Entwicklungen nach fallenden Potenzen der unabhängigen Variablen des transformierten Bereiches einen Einblick in den zeitlichen Verlauf der mechanischen Vorgänge gestatten. Kenntnis der Eigenfrequenzen ist für den zeitlichen Verlauf unmittelbar nach einer Gleichgewichtstörung nicht erforderlich.

In the linearised equations of movement of a rigid body in the resistant medium the angles of Euler and the vector of celerity are introduced as dependent variables. The application of the one-sided transformation of Laplace shows that simple developments following falling potences of the independent variables of the transformed range allow the knowledge of the chronological course of the mechanical processes. Knowledge of the specific frequences is not necessary for the chronological course immediately after disturbances of equilibrium.

Dans les équations de mouvement rendues linéaires d'un corps rigide au médium résistan les angles d'Euler et le vecteur de vitesse sont introduits comme des variables dépendants. L'application de la transformation unilatérale de Laplace montre que des développements simples suivant des potences tombantes des variables indépendants du domaine transformé permettent à comprendre le cours chronologique des procès méchaniques. La connaissance des fréquences spécifiques n'est pas nécessaire pour le cours chronologique immédiatement après un dérangement de l'équilibre.

В линеаризированных уравнениях движения твердого тела в сопротивляющейся среде вводятся, в качестве независимых переменных, эйлеровы углы и векторы скорости. Применение одностороннего преобразования Лапласа показывает, что простые разложения по убывающим степеням независимых переменных преобразованной области способствуют выявлению последовательности механических процессов во времени. Знание собственных частот для временного процесса непосредственно после нарушения равновесия не требуется.

I. Bei der Untersuchung gewisser Bewegungsaufgaben, die technisch von großer Bedeutung sind, wird seit langem die sogenannte Methode der kleinen Schwingungen mit Vorteil

verwendet. Diese Aufgaben betreffen das Verhalten eines starren Körpers in der unmittelbaren Nähe eines stationären Bewegungszustandes (Routh "steady motion") und dienen dazu, entweder den Einschwingvorgang oder die Wirkung einer Störkraft zu berechnen. Da die vom umgebenden Medium auf den Körper ausgeübten Kräfte üblicherweise nicht-konservativ sind, so muß zur Durchführung der Rechnung die Einschränkung gemacht werden, daß bei einer Bahnstörung keine mechanische Energie in eine andere Energieform umgewandelt wird:

Es möge v die Geschwindigkeit, ω die Drehgeschwindigkeit des starren Körpers K (m: Masse, T: Trägheitstensor) sein, auf den die äußere Kraft P (Schwerkraft und Kraft des umgebenden Mediums der Dichte ϱ) wirke, deren Moment um den Körperschwerpunkt M sei. F bedeute eine charakteristische Bezugsfläche, c eine Länge von K. Der stationäre Zustand werde durch den Index „0" gekennzeichnet. Wird (H. Glauert) die Größe $t_S = 2m/F\varrho v_0$, welche die Dimension einer Zeit hat, eingeführt, so ergeben sich als maßstabsfreie Größen für

Geschwindigkeit	$\tilde{v}(\tau) = v/v_0$	Kraft	$\widetilde{P}(\tilde{v}, \tilde{\omega}, \Phi, \xi) = 2\,P/F\varrho\, v_0^2$
Drehgeschwindigkeit	$\tilde{\omega}(\tau) = \omega \cdot t_S$	Moment	$\widetilde{M}(\tilde{v}, \tilde{\omega}, \Phi, \xi) = 2\,M/Fc\varrho\, v_0^2$
Masse	$\mu = 2\,m/F\varrho\, c$	Massenverteilung	$\widetilde{T} = T/mc^2$

mit $\tau = t/t_S$ als unabhängiger Variable anstelle der Zeit t; die Spaltenmatrix $\Phi = (\varphi, \vartheta, \psi)$ gibt die Orientierung des körperfesten (x, y, z)-Achsenkreuzes gegenüber dem erdfesten (x_e, y_e, z_e)-Kreuz (Bild 1); die positive z_e-Achse weise in Richtung der Erdbeschleunigung nach

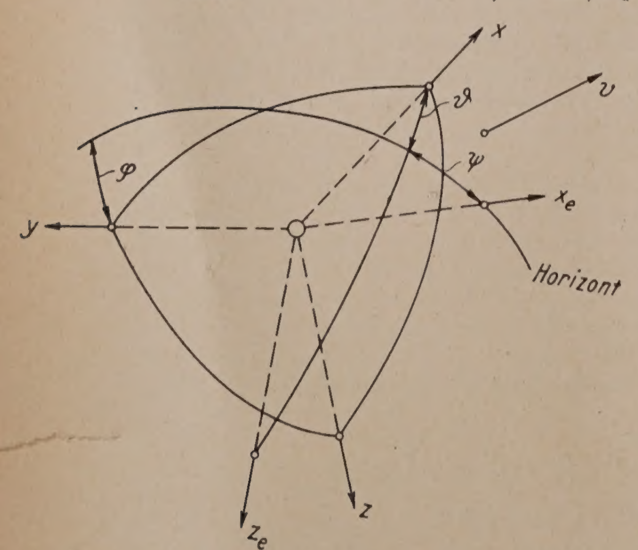


Bild 1a

Bild 1b

unten, während die x_e-Achse eine beliebige horizontale Kursrichtung darstelle; die Anfangspunkte beider Systeme fallen mit dem Schwerpunkt von K zu sammen. — Ferner bedeute $A(r)$ denjenigen schiefsymmetrischen Affinor (Axiator), dessen Produkt $A(r)\,n$ mit einem beliebigen Vektor n gleich dem Vektorprodukt $r \times n$ sei. — Die Spaltenmatrix $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ stellt die Ruderausschläge dar.

Wird von den zeitlichen Änderungen ausgegangen, die der Impulsvektor mv und der Vektor des Impulsmomentes $T\omega$ für einen mit K bewegten Beobachter erleiden, und wird nach G. Doetsch mit dem Symbol $\mathfrak{L}\{\cdots\}$ die einseitig unendliche Laplace-Transformation einer Funktion $F(\tau)$ in eine Funktion $f(\lambda)$ einer komplexen Variablen λ $(R(\lambda) > 0)$ bezeichnet, so lauten — wenn die Tensor- und Vektorkomponenten bezüglich des körperfesten Achsenkreuzes als Elemente entsprechender Matrizen aufgefaßt werden — die Störungsgleichungen

$$[\lambda I_3 + A(\tilde{\omega}_0)]\,\mathfrak{L}\{\Delta\tilde{v}(\tau)\} - A(\tilde{v}_0)\,\mathfrak{L}\{\Delta\tilde{\omega}(\tau)\} = \mathfrak{L}\{\Delta\widetilde{P}\} + f \quad \text{(1a)},$$

$$[\widetilde{T}\lambda I_3 + A(\tilde{\omega}_0)\,\widetilde{T} - A(\widetilde{T}\,\tilde{\omega}_0)]\,\mathfrak{L}\{\Delta\tilde{\omega}(\tau)\} = \mathfrak{L}\{\Delta\widetilde{M}\} + g \quad \text{(1b)}.$$

Die Größen $\Delta\tilde{v}, \ldots$ bedeuten hierbei die Änderungen der jeweiligen Werte infolge der Störung des stationären Bewegungszustandes; die Größen f und g stellen Spaltenmatrizen dar, die in leicht angebbarer Weise (6b) Funktionen der Anfangswerte sind; I_3 ist die Einheitsmatrix.

II. Die Anwendbarkeit der Störgleichungen (1a, b) wird bei Einführung der Lagewinkel anstelle von $\Delta\tilde{\omega}$ beträchtlich erhöht, dies gilt insbesondere für automatisch gesteuerte Bewegungen, wenn das Steuerorgan auf Lageänderungen von K im Raum anspricht.

Als Grundbewegung soll im folgenden eine gradlinige stationäre Bahn mit Hängen im Raum ($\varphi_0 \neq 0$) und Schieben gegenüber der Bahn ($v_{y0} \neq 0$) von K vorausgesetzt werden. Mit der Spaltenmatrix $\mathfrak{L}\{\Delta\Phi\} = (y_4, y_5, y_6)$ wird dann $\mathfrak{L}\{\Delta\tilde{\omega}\} = \lambda\, \Theta_0\, \mathfrak{L}\{\Delta\Phi\}$ mit

$$\Theta_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin\vartheta_0 \\ 0 & \cos\varphi_0 & \cos\vartheta_0 \sin\varphi_0 \\ 0 & -\sin\varphi_0 & \cos\vartheta_0 \cos\varphi_0 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Ferner soll vereinfachend angenommen werden, daß eine Massen-Symmetrieebene des Körpers K mit der xz-Ebene zusammenfalle; bedeuten $I_{x,y,z}$ die jeweiligen Massenträgheitsmomente, D_2 das auf die xy- und yz-Ebene bezogene Deviationsmoment, so wird mit Einführung der Trägheitsradien i $(I = i^2 m)$

$$\tilde{T} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} i_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & i_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & i_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\varepsilon_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

mit $\varepsilon_1 = D_2/I_x$, $\varepsilon_3 = D_2/I_z$.

Die dimensionslosen Ableitungen der durch das Medium hervorgerufenen Kräfte und Momente nach $\tilde{v}_{x,y,z}$ mögen nach Glauert durch die Indizes u, v, w, die nach $\tilde{\omega}_{x,y,z}$ durch die Indizes p, q, r gekennzeichnet sein; bei der Kraft sollen die Buchstaben x, y, z z.B.

$$x_u = -\frac{\partial \tilde{P}_x}{\partial \tilde{v}_x}, \quad x_p = -\mu \frac{\partial \tilde{P}_x}{\partial \tilde{\omega}_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

bei dem Moment sollen die Buchstaben l, m, n, z.B.

$$l_u = -\left(\frac{c}{i_x}\right)^2 \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial \tilde{v}_x}, \quad l_p = -\mu \left(\frac{c}{i_x}\right)^2 \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial \tilde{\omega}_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

die Komponenten bezüglich der körperfesten Achsen bedeuten.

Wird schließlich noch die Spaltenmatrix $\mathfrak{L}\{\Delta\tilde{v}\} = (y_1, y_2, y_3)$ eingeführt, so ergibt sich nach Zusammenfassung entsprechender Glieder die Matrizengleichung

$$a(\lambda)\, y^* = f(y_j(0), \dot{y}_j(0), \lambda) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wobei die ersten drei Komponenten $y_1^* = y_1$, $y_2^* = y_3$, $y_3^* = y_5$ der Spaltenmatrix y^* die Variablen der Längsbewegung, die Komponenten $y_4^* = y_2$, $y_5^* = y_4$, $y_6^* = y_6$ die der Seitenbewegung

	$y_1^* = y_1$	$y_2^* = y_3$	$y_3^* = y_5$	$y_4^* = y_2$	$y_5^* = y_4$	$y_6^* = y_6$
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$i = 1$	$x_u + \lambda$	x_w	$k \cos\vartheta_0 + \lambda[\tilde{v}_{z0} \cos\varphi_0 + \tilde{v}_{y0} \sin\varphi_0] + \lambda\, x_{q,r}\, \mu^{-1}$	x_v	$\lambda\, x_p\, \mu^{-1}$	$\lambda \cos\vartheta_0 [\tilde{v}_{z0} \sin\varphi_0 - \tilde{v}_{y0} \cos\varphi_0] + \lambda\, x_\Omega\, \mu^{-1}$
$i = 2$	z_u	$z_w + \lambda$	$k \sin\vartheta_0 \cos\varphi_0 - \lambda\, \tilde{v}_{x0} \cos\varphi_0 + \lambda\, z_{q,r}\, \mu^{-1}$	z_v	$k \cos\vartheta_0 \sin\varphi_0 + \lambda\, \tilde{v}_{y0} + \lambda\, z_p\, \mu^{-1}$	$-\lambda[\tilde{v}_{x0} \cos\vartheta_0 \sin\varphi_0 + \tilde{v}_{y0} \sin\vartheta_0] + \lambda\, z_\Omega\, \mu^{-1}$
$i = 3$	$\mu\, m_u$	$\mu\, m_w + \lambda\, m_{\dot{w}}$	$\lambda\, m_{q,r} + \lambda^2 \cos\varphi_0$	$\mu\, m_v$	$\lambda\, m_p$	$\lambda\, m_\Omega + \lambda^2 \cos\vartheta_0 \sin\varphi_0$
$i = 4$	y_u	y_w	$k \sin\vartheta_0 \sin\varphi_0 - \lambda\, \tilde{v}_{x0} \sin\varphi_0 + \lambda\, y_{q,r}\, \mu^{-1}$	$y_v + \lambda$	$-k \cos\vartheta_0 \cos\varphi_0 - \lambda\, \tilde{v}_{z0} + \lambda\, y_p\, \mu^{-1}$	$\lambda[\tilde{v}_{x0} \cos\vartheta_0 \cos\varphi_0 + \tilde{v}_{z0} \sin\vartheta_0] + \lambda\, y_\Omega\, \mu^{-1}$
$i = 5$	$\mu\, l_u$	$\mu\, l_w$	$\lambda\, l_{q,r} + \lambda^2 \varepsilon_1 \sin\varphi_0$	$\mu\, l_v$	$\lambda\, l_p + \lambda^2$	$\lambda\, l_\Omega - \lambda^2 [\sin\vartheta_0 + \varepsilon_1 \cos\vartheta_0 \cos\varphi_0]$
$i = 6$	$\mu\, n_u$	$\mu\, n_w$	$\lambda\, n_{q,r} - \lambda^2 \sin\varphi_0$	$\mu\, n_v$	$\lambda\, n_p - \lambda^2 \varepsilon_3$	$\lambda\, n_\Omega + \lambda^2 [\cos\vartheta_0 \cdot \cos\varphi_0 + \varepsilon_3 \sin\vartheta_0]$

(7),

sind. In (7) ist das Koeffizientenschema a_{ik} der Störbewegung wiedergegeben; die in (7) benutzten Abkürzungen sind definiert durch

$$\Theta_0' \begin{pmatrix} x_p & y_p & z_p \\ x_q & y_q & z_q \\ x_r & y_r & z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p & y_p & z_p \\ x_{qr} & y_{qr} & z_{qr} \\ x_\Omega & y_\Omega & z_\Omega \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Theta_0' \begin{pmatrix} l_p & m_p & n_p \\ l_q & m_q & n_q \\ l_r & m_r & n_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_p & m_p & n_p \\ l_{qr} & m_{qr} & n_{qr} \\ l_\Omega & m_\Omega & n_\Omega \end{pmatrix},$$

wobei Θ_0' die zu (3) transponierte Matrix ist; ferner stellt $g\, t_S/v_0 = 2\, G/F\, \varrho\, v_0^2 = k$ (Gewicht des starren Körpers $= G$) eine charakteristische Zustandsgröße der Bewegung dar. Bei Einführung des sog. Schiebewinkels $\beta\, (v_{y0} = -\sin\beta_0)$ und des Anströmungswinkels $\alpha\, (v_{z0}/v_{x0} = \operatorname{tg}\alpha_0)$ kann in (7) bei $\varphi_0 = 0$

$$\tilde{v}_{x0} \cos\vartheta_0 + \tilde{v}_{z0} \sin\vartheta_0 = \cos\beta_0 \cos(\vartheta_0 - \alpha_0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

geschrieben werden; bedeutet γ_0 der Winkel der stationären Bewegung mit der horizontalen Ebene, so gilt im Falle $v_{y0} = 0$ der einfache Zusammenhang $\vartheta_0 - \gamma_0 = \alpha_0$.

In dem Koeffizienten a_{32} wurde der Einfluß der Größe

$$m_{\dot{w}} = -\left(\frac{c}{i_y}\right)^2 \frac{v_0^2}{c} \frac{\partial \widetilde{M}_y}{\partial \dot{w}}$$

berücksichtigt, welche bei gewissen Untersuchungen nicht vernachlässigbar ist (B. Melvill Jones, W. Bader).

Besitzt der Körper eine metazentrische Höhe, so daß bei einer Lagenänderung $\Delta\varphi$ ein Rollmoment $(\partial M_x/\partial\varphi)\; \Delta\varphi$ entsteht, so lautet der Koeffizient $a_{55} = \lambda^2 + l_p \lambda + \mu\, l\, \varphi$ mit

$$l_\varphi = -\left(\frac{c}{i_x}\right)^2 \frac{\partial M_x}{\partial \varphi}.$$

Bei der Untersuchung von Steuerungsfragen treten in (6) zusätzlich die Größen a_{17} auf; diese haben bei den Kraftgleichungen ($i = 1, 2, 4$) die Form

$$a_{17} = x_\xi = -\frac{\partial \widetilde{P}_x}{\partial \xi}$$

bei den Momentengleichungen ($i = 3, 5, 6$) die Form

$$a_{37} = \mu\, m_\xi = -\mu \left(\frac{c}{i_y}\right)^2 \frac{\partial \widetilde{M}_y}{\partial \xi},$$

wobei $\Delta\xi$ einen beliebigen Ruderausschlag darstellt. In diesem Falle erweitert sich (6) um die Momentengleichung (6a) um die Ruderachse. Die Annahme, daß das Moment M_R, welches der Ruderwelle durch die Steuerung aufgezwungen wird, proportional der gewählten Aufschaltungsgröße y_j^* ist, führt, falls der geometrische Ruderwinkel gleich dem wirksamen Ruderwinkel ist, zu der Beziehung

$$I_R\, \Delta\ddot{\xi} - \frac{\partial M_R}{\partial \omega_\xi}\, \Delta\dot{\xi} - \frac{\partial M_R}{\partial \xi}\, \Delta\xi = C \cdot \mathfrak{L}^{-1}\{y_j\}.$$

Hierbei ist M_R positiv gerechnet, wenn es in positivem Sinne um die Ruderachse dreht; I_R bedeutet, das Massenträgheitsmoment des Ruders an der Ruderachse, C die Intensität der Aufschaltung; das Dämpfungsglied $\partial M_R/\partial\omega_\xi$ und das Rückführglied $\partial M_R/\partial\xi$ müssen als gegebene Größen vorausgesetzt werden, deren Berechnung in vielen Fällen anhand einfachster Annahmen erfolgen kann. Als Steuergleichung tritt also in diesem Falle zu (6) mit $y_7^* = y_7$ noch die Beziehung

$$(\lambda^2 + 2\, \delta_R\, \lambda + \omega_R^2) \cdot y_7^* + K\, y_j^* = 0 \qquad (6a)$$

hinzu, deren Konstanten in leicht ersichtlicher Weise gebildet worden sind.

III. Einer Anwendung von (7) auf ein bestimmtes technisches Problem ständen ungewöhnliche Schwierigkeiten entgegen, wenn die 2 Hauptträgheitsachsen enthaltende xz-Ebene nicht fast immer gleichzeitig eine geometrische Symmetrieebene des starren Körpers wäre. Dann entfällt bei der besonders wichtigen stationären Bewegung ohne Hängen und Schieben der Einfluß des Schiebens (v_y), des Rollens (ω_x) und des Wendens (ω_z) auf den Widerstand, die Normalkraft und das Längsmoment:

$$x_v = z_v = m_v = 0; \qquad x_p = z_p = m_p = 0; \qquad x_r = z_r = m_r = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (9).$$

Das gleiche gilt für die Wirkung des Anströmungswinkels (v_z) und des Kippens (ω_y) auf die Seitenkraft, das Roll- und Wendemoment:

$$y_w = l_w = n_w = 0; \qquad y_q = l_q = n_q = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9a).$$

Unter diesen Annahmen zerfällt nach Bairstow die zu (6) gehörende Frequenz-Determinante $|a_{ik}|$, welche in λ vom 9. Grade ist, in das Produkt zweier dreireihigen Determinanten:

$$|a_{ik}| = D_1 \cdot D_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10).$$

Mit

$$D_1 = \lambda^4 + a_{30}\lambda^3 + a_{20}\lambda^2 + a_{10}\lambda + a_{00} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

ist

$$a_{30} = m_q + z_w + x_u + c_1 m_{\dot{w}}$$

$$a_{20} = m_q(z_w + x_u) + x_u z_w + c_1 \mu m_w - c_2 \mu m_u + c_3 m_{\dot{w}}$$

$$a_{10} = c_3 \mu m_w + (x_u z_w - x_w z_u) m_q - c_4 \mu m_u$$

$$a_{00} = \mu k [\cos \vartheta_0 (z_u m_w - z_w m_u) - \sin \vartheta_0 (x_u m_w - x_w m_u)]$$

wobei

$$c_1 = \cos \alpha_0 - z_q/\mu, \qquad c_2 = \sin \alpha_0 + x_q/\mu$$

$$c_3 = c_1 x_u + c_2 z_u - k \sin \vartheta_0, \qquad c_4 = c_1 x_w + c_2 z_w + k \cos \vartheta_0$$

gesetzt ist. Für die 2. Determinante

$$D_2 = \lambda \cos \vartheta_0 [b_{40}\lambda^4 + b_{30}\lambda^3 + b_{20}\lambda^2 + b_{10}\lambda + b_{00}] \quad \ldots \ldots \ldots (12)$$

ist

$$b_{40} = 1 - \epsilon_1 \epsilon_3$$

$$b_{30} = l_p + n_r + y_v(1 - \epsilon_1 \epsilon_3) + \epsilon_3 l_r + \epsilon_1 n_p$$

$$b_{20} = l_p n_r - l_r n_p + y_v(l_p + n_r + \epsilon_3 l_r + \epsilon_1 n_p) + \mu l_v (d_2 - \epsilon_3 d_1) - \mu n_v (d_1 - \epsilon_1 d_2)$$

$$b_{10} = y_v (l_p n_r - l_r n_p) + \mu l_v d_4 - \mu n_v d_3$$

$$b_{00} = \mu k [\cos \vartheta_0 (l_v n_r - l_r n_v) - \sin \vartheta_0 (l_v n_p - l_p n_v)]$$

wobei

$$d_1 = \cos \alpha_0 + y_r/\mu, \qquad d_2 = \sin \alpha_0 - y_p/\mu$$

$$d_3 = d_1 l_p + d_2 l_r - k(\sin \vartheta_0 + \epsilon_1 \cos \vartheta_0)$$

$$d_4 = d_1 n_p + d_2 n_r + k(\cos \vartheta_0 + \epsilon_3 \sin \vartheta_0)$$

ist.

Von diesen Koeffizienten, die erstmalig in vereinfachter Form von Bryan, Reißner und Gehlen aufgestellt wurden, sind bei der Potenzreihenentwicklung insbesondere diejenigen von Bedeutung, welche den höheren Potenzen von λ zugeordnet sind. Der Grund hierfür ist aus der Theorie der Laplace-Transformation bekannt: aus dem Verhalten der Unterfunktion für $\lambda \to \infty$ kann unter gewissen Voraussetzungen auf das Verhalten der Oberfunktion für $\tau \to 0$ geschlossen werden.

Die durch (6) gegebenen Unterfunktionen y_j haben die Form

$$y_j^* = g_j(\lambda)/|a_{ik}| \qquad (13),$$

wobei die $g_j(\lambda)$ ganze rationale Funktionen von λ sind, welche aus $|a_{ik}|$ dadurch gewonnen werden, daß die a_{ij} durch die nachstehenden $f_i(\lambda)$ ersetzt werden:

$$\left.\begin{aligned}
f_1 &= y_1(0) + c_2 y_5(0) \\
f_2 &= y_3(0) - c_1 y_5(0) \\
f_3 &= m_{\dot{w}}\, y_3(0) + [m_q + \lambda]\, y_5(0) + \dot{y}_5(0) \\
f_4 &= y_2(0) - d_2\, y_4(0) + a_{46}\, \lambda^{-1} y_6(0) \\
f_5 &= [l_p + \lambda]\, y_4(0) + \dot{y}_4(0) + a_{56}\, \lambda^{-1} y_6(0) - [\sin \vartheta_0 + \epsilon_1 \cos \vartheta_0]\, \dot{y}_6(0) \\
f_6 &= [n_p - \epsilon_3 \lambda]\, y_4(0) - \epsilon_3\, \dot{y}_4(0) + a_{66}\, \lambda^{-1} y_6(0) + [\cos \vartheta_0 + \epsilon_3 \sin \vartheta_0]\, \dot{y}_6(0)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (6b)$$

Somit sind die $y_j(\lambda)$ reguläre Funktionen, die mit wachsendem λ gegen 0 streben. Nebenbei zeigt (6a) unmittelbar, daß bei einem ungesteuerten Körper der Bewegungszustand durch eine Störung $y_6(0)$ unbeeinflußt bleibt: in diesem Fall wird

$$y_1(\lambda) = y_2(\lambda) = \cdots = y_5(\lambda) = 0, \qquad y_6(\lambda) = y_6(0)/\lambda.$$

Unter Benutzung der Entwicklung:

$$\frac{1}{D_1} = \lambda^{-4} - a_{30}\lambda^{-5} + [a_{30}^2 - a_{20}]\lambda^{-6} - [a_{30}^3 - 2\,a_{20}a_{30} + a_{10}]\lambda^{-7} \pm \ldots \quad \ldots \quad (14)$$

ergibt gliedweise Zusammenfassung die Reihenentwicklung

$$y_j^* = \sum_{\nu}^{\infty} c^{(\nu)}\lambda^{-\nu}, \qquad \nu \geq 1 \ldots\ldots\ldots (15),$$

welche für hinreichend große $|\lambda|$ konvergent ist; obwohl dementsprechend der gesuchte Bewegungsverlauf durch

$$\mathfrak{L}^{-1}\{y_j^*(\lambda)\} = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{c^{(\nu)}\tau^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \ldots\ldots\ldots (16)$$

zu jedem Zeitpunkt gegeben ist, wird man sich ausnahmslos auf kleine Werte von τ beschränken müssen, da die Ermittlung der höheren $c^{(\nu)}$ zu schwierig wird. Der Einfluß der verschiedenen Parameter auf die unmittelbar nach einer Störung des stationären Bewegungszustandes einsetzende Bewegung kann somit nach (16) ohne Kenntnis der Eigenfrequenzen erfaßt werden. Begünstigt wird diese Methode sehr oft durch den Umstand, daß der Zeitmaßstab t_S in technisch wichtigen Fällen größer als die Zeiteinheit ist.

Bei der Durchführung dieser Rechnung erweist sich mitunter das Auftreten bestimmter zahlenmäßig großer Dämpfungswerte (z.B. l_p) zunächst als störend. In diesem Falle empfiehlt es sich, bereits in der Entwicklung (15) eine Abspaltung des entsprechenden Dämpfungsfaktors vorzunehmen. — Die Koeffizienten $c^{(\nu)}$ setzen sich einerseits aus den Koeffizienten a_{i0} bzw. b_{i0} der Frequenzgleichungen und andererseits aus den Koeffizienten der $g_j(\lambda)$ zusammen. Die Berechnung der $c^{(\nu)}$ wird in der Regel vereinfacht, wenn nicht gleich zu Rechnungsbeginn die durch (11a) bzw. (12a) gegebenen Beziehungen eingeführt werden, da in vielen Fällen die Koeffizienten der $g_j(\lambda)$ in einfacher Form mit a_{i0} bzw. b_{i0} zusammenhängen. Eine Beachtung dieser etwaigen Zusammenhänge kann die Berechnung der $c^{(\nu)}$ oft erheblich erleichtern.

IV. Für die nachstehende Rechnung ist eine Bewegung mit so geringer Seitenbewegung ($v_{y0} \neq 0$) angenommen, daß die Voraussetzungen (9), (9a) noch hinreichend genau erfüllt seien; jedoch soll die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Roll- und Wendemomentes berücksichtigt werden, da diese insbesondere in der Nähe der Schallgeschwindigkeit unter Umständen von Bedeutung sein können. Für die Frequenz-Determinante (10) ergibt sich der Ausdruck

$$D = D_1 \cdot D_2 + \bar{v}_{y0}\cos\vartheta_0 \cdot \mu\,(\epsilon_3 l_u + n_u)\lambda^7 + \cdots \ldots\ldots (10\text{a}),$$

wobei D_1 bzw. D_2 die durch (11) bzw. (12) definierten Determinanten der reinen Längs- bzw. Seitenbewegung ist; die in folgendem nicht benötigten Koeffizienten der Potenzen $\lambda^6, \cdots, \lambda^1$, welche $\bar{v}_{y0}$ als Faktor enthalten, sind lineare Ausdrücke von der Form $C_1 l_u + C_2 n_u$, wobei die $C_{1,2}$ sich aus den Stabilitätsgrößen der Längs- und Seitenbewegung in verwickelter Form zusammensetzen; selbst eine rein zahlenmäßige Ermittlung der Frequenzen erscheint ohne Anwendung mathematischer Geräte hoffnungslos.

Als Beispiel der Erfassung des Einflußes einer Längsstörung auf die Seitenbewegung soll nachstehend der zeitliche Verlauf der Querneigung $\Delta\varphi(\tau)$ kurz betrachtet werden, der infolge einer Geschwindigkeitsstörung $\Delta v_x(0)$ eintritt; hierbei ergibt sich folgendes Verhalten:

Mit Rücksicht auf (6b) wird die Funktion f in (6) durch die Spaltenmatrix

$$\{1, 0, 0, 0, 0, 0\}\,\frac{\Delta v_x(0)}{v_0}$$

dargestellt; wegen (9), (9a) kann die Funktion $g(\lambda)$ in (13) in 2 Faktoren zerlegt werden: $g = \dfrac{\Delta v_x(0)}{v_0}\,g_1\,g_2$ die nach (7) sich zu

$$g_1 = \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}, \quad g_2 = -\mu\,l_u \begin{vmatrix} a_{44}, & a_{46} \\ a_{64}, & a_{66} \end{vmatrix} + \mu\,n_u \begin{vmatrix} a_{44}, & a_{46} \\ a_{54}, & a_{56} \end{vmatrix} = -\mu\,l_u \cdot g_2' + \mu\,n_u \cdot g_2''$$

berechnen; für hinreichend große λ gilt somit ($\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0$):

$$\mathfrak{L}\{\Delta\varphi(\tau)\} = \frac{\Delta v_x(0)}{v_0}\,\frac{g_1}{D_1}\,\frac{g_2}{D_2}\left(1 - \frac{\bar{v}_{y0}\cos\vartheta_0\,\mu\,n_u\,\lambda^7}{D_1 D_2} \pm \cdots\right).$$

Die Entwicklung nach (14) ergibt

$$\frac{g_1}{D_1} = \lambda^{-1} - x_u \lambda^{-2} + (x_u^2 + \sin \alpha_0 [\mu m_u - z_u m_{\dot{w}}]) \lambda^{-3} \pm \cdots$$

$$\frac{g_2'}{D_2} = \lambda^{-2} - (l_p + n_p \operatorname{tg} \vartheta_0) \lambda^{-3} \pm \cdots$$

$$\frac{g_2''}{D_2} = - \operatorname{tg} \vartheta_0 \lambda^{-2} + (n_v \operatorname{tg} \vartheta_0 - l_v) \lambda^{-3} \mp \cdots .$$

Werden vorübergehend die Abkürzungen

$$A = x_u + l_p + n_p \operatorname{tg} \vartheta_0 \qquad B = (n_r + x_u) \operatorname{tg} \vartheta_0 - l_r \qquad C = (\mu m_u - z_u m_{\dot{w}}) \sin \alpha_0$$

eingeführt, so ist nach (16) die infolge der Geschwindigkeitsstörung einsetzende Rollbewegung durch den Ausdruck

$$\Delta\varphi(\tau) = - \frac{\Delta v_x(0)}{v_0} \mu \left\{ l_u \left[\frac{\tau^2}{2!} - A \frac{\tau^3}{3!} + (A x_u + C - \bar{v}_{y0} \mu n_u) \frac{\tau^4}{4!} \mp \cdots \right] \right.$$
$$\left. + n_u \left[\operatorname{tg} \vartheta_0 \frac{\tau^2}{2!} - B \frac{\tau^3}{3!} B + (x_u + C \operatorname{tg} \vartheta_0 - \bar{v}_{y0} \operatorname{tg} \vartheta_0 \mu n_u) \frac{\tau^4}{4!} \mp \cdots \right] \right\}$$

gegeben, wenn bis zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit des starren Körpers um den Betrag $\Delta v_x(0)$ gegenüber dem Wert v_0 des stationären Bewegungszustandes abweicht.

In Übereinstimmung mit der unmittelbaren Anschauung wird mithin bei horizontaler Bewegung — bei hinreichend großem v_0 kann der Längsneigungswinkel ϑ_0 des starren Körpers dem Bahnneigungswinkel γ_0 gleichgesetzt werden — der Hängewinkel $\Delta\varphi(\tau)$ zunächst stärker durch das Geschwindigkeits-Rollmoment l_u als durch das Geschwindigkeits-Wendemoment n_u beeinflußt. Bei geneigter Flugbahn setzt entweder bei Gleitbewegung ($\vartheta_0 < 0$) oder bei Steigbewegung ($\vartheta_0 > 0$) die Rollbewegung $\Delta\dot{\varphi}$ verstärkt ein, je nach dem ob l_u und n_u entgegengesetztes oder gleiches Vorzeichen besitzen. — Ferner ist der Reihenentwicklung unmittelbar zu entnehmen, daß im Unterschallbereich die Rolldämpfung l_p und der Widerstand x_u gleichsinnig auf das Rollen dämpfend wirken. Im Überschallgebiet kann gegebenenfalls x_u negativ werden, so daß eine Entdämpfung eintreten kann, da hier l_p als klein angenommen werden muß. Auch der Einfluß des Wende-Rollmomentes l_r auf die einsetzende Rollbewegung ist gut erkennbar: bei üblichem Vorzeichen (bei positiver Wendedrehung entsteht ein positives Rollmoment: $l_r < 0$) wirkt im Gleiten ($\vartheta_0 < 0$) das Wenderollmoment entdämpfend; bei horizontaler Bewegung kann das Wendemoment n_u zunächst nur über l_r auf die Rollbewegung einwirken; beim Steigen ($\vartheta_0 > 0$) wird das Rollmoment in seiner dämpfenden Wirkung durch die Wendedämpfung n_r und den Widerstand x_u unterstützt.

Wäre hingegen zur Zeit $t < 0$ der Körper im stationären Bewegungszustand gewesen und würde für die Zeit $t \geq 0$ auf den Körperschwerpunkt eine konstante äußere Kraft P_0 in Richtung der körperfesten x-Achse wirken, so wäre in (6a) zu setzen:

$$f_1 = \lambda^{-1} P_0/F \frac{\varrho}{2} v_0^2, \qquad f_2 = f_3 = \cdots = f_6 = 0 .$$

Dem entsprechend hätte sich für den Hängewinkel der Wert

$$\Delta\varphi(\tau) = \frac{P_0}{F \varrho/2 \, v_0^2} \mu \left\{ l_u \left[\frac{\tau^3}{3!} - A \frac{\tau^4}{4!} \pm \cdots \right] + n_u \left[\operatorname{tg} \vartheta_0 \frac{\tau^3}{3!} - B \frac{\tau^4}{4!} \pm \cdots \right] \right\}$$

ergeben. Im letzteren Falle setzt naturgemäß die Rollgeschwindigkeit sanfter (quadratisch mit der Zeit ansteigend) ein, da die Geschwindigkeitsstörung wegen der Trägheit von K erst von 0 aus anwachsen muß; im übrigen bleiben die sonstigen Schlußfolgerungen erhalten.

V. Bei ungekoppelter Längs- oder Seitenbewegung sind die in (16) auftretenden Koeffizienten i. a. beträchtlich einfacher, so daß nach (6a) auch automatisch geregelte Vorgänge gut dargestellt werden können, wie nachstehendes Beispiel der gesteuerten Längsbewegung zeigt. Zur Regelung möge ein Pendelkreisel, der auf Lageänderungen anspricht, verwendet werden; wird mit $\xi = (0, \eta, 0)$ die Steuergleichung in der vereinfachten Form $\Delta\eta = K \cdot \Delta\vartheta$ verwendet, wobei je nach Art des Ruders entweder die Kraft x_η oder das Moment m_η vorzugsweise beeinflußt

wird, und wird eine Lagenstörung $\Delta\vartheta(0)$ als Anfangsstörung vorausgesetzt, so ergibt sich für den Verlauf der Längsneigung der Ausdruck[1])

$$\Delta\vartheta(\tau) = \Delta\vartheta(0)\left\{1 - K[\mu\, m_\eta - z_\eta\, m_{\dot\alpha}]\,\frac{\tau^2}{2!} + c^{(4)}\frac{\tau^3}{3!} \mp \cdots\right\}$$

mit

$$c^{(4)} = -\,2\,k^2 m_{\dot\alpha} + K[\mu m_\eta(m_q + m_{\dot\alpha}) + z_\eta(\mu m_\alpha - m_{\dot\alpha} a_{30}) - x_\eta\, 2\, k\, m_{\dot\alpha}]\,,$$

wenn die stationäre Bewegung horizontal verläuft. Es ist beachtenswert, daß die Steuerung früher als die statische Stabilität in den Bewegungsverlauf eingreift. Ein Vergleich der einzelnen Zustandsgrößen der Bewegung bei verschiedenen Steuerungen zeigt u. a., daß es grundsätzlich günstig ist, wenn der Wert der unmittelbar gestörten Zustandsgröße (im obigen Fall die Größe $\Delta\vartheta(0)$) erst nach gewisser Zeit durch die Steuerung beeinflußt wird; denn in diesem Falle bleibt der Ausschlag $\Delta\eta(\tau)$ hinreichend lange erhalten, so daß die anderen Störungen der einzelnen Variablen, die anfänglich beim gesteuerten wie beim ungesteuerten starren Körper einsetzen, in ihren Amplituden verhältnismäßig klein bleiben. In Übereinstimmung hiermit ergibt sich z. B.

$$\Delta v(\tau) = -\,v_0 \cdot \Delta\vartheta(0)\,\{[k + K\,x_\eta]\,\tau \mp \cdots\},$$

wobei k die in (7) eingeführte Größe darstellt. Bei geeigneter Wahl der Aufschaltungs-Intensität K kann somit das Anwachsen der Geschwindigkeitsstörung bei einer Längsneigungsstörung in gewünschtem Sinn beeinflußt werden. Entsprechend kann ohne Schwierigkeiten der oft vorliegende Fall einer momentanen Geschwindigkeitsstörung untersucht werden. Hier zeigt die Rechnung, daß die Lagesteuerung verhältnismäßig spät in den zeitlichen Verlauf der Längsneigung eingreift:

$$\Delta\vartheta(\tau) = \frac{\Delta v_x(0)}{v_0}\,[2\,k + z_v]\left\{c^{(3)}\frac{\tau^2}{2!} + c^{(4)}\frac{\tau^3}{3!} + c^{(5)}\frac{\tau^4}{4!} + \cdots\right\}$$

mit

$$c^{(3)} = m_{\dot\alpha}\,, \qquad c^{(4)} = \mu\, m_\alpha - a_{30}\, m_{\dot\alpha}\,,$$

$$c^{(5)} = a_{30}\, c^{(4)} - m_{\dot\alpha}\,[\mu\, m_\alpha + z_\alpha\, m_q + K(\mu\, m_\eta - z_\eta\, m_{\dot\alpha})]\,,$$

und bei $v_{y0} = 0$:

$$m_\alpha = m_w \cos\alpha_0 - m_u \sin\alpha_0$$

$$z_\alpha = z_w \cos\alpha_0 - z_u \sin\alpha_0\,,$$

wobei a_{30} nach (11) im wesentlichen das Dämpfungsglied der sogenannten schnellen Drehschwingung ist. — Dieses Verhalten der Steuerung kann jedoch nicht als ein Mangel aufgefaßt werden: die durch den Pendelkreisel erfaßte Größe $\Delta\vartheta(\tau)$ muß eine gewisse Zeit möglichst unbeeinflußt bleiben, damit die Steuerung ihre Aufgabe erfüllen kann. Der wirksamste Eingriff in den Bewegungszustand dürfte dann eintreten, wenn: 1) diejenige Zustandsgröße der Bewegung, auf deren Abweichung von einem vorgegebenen Soll-Wert die Steuerung anspricht, stark gedämpft aperiodisch auf ihren Soll-Wert zurückgeführt wird; 2) die anderen, ursprünglich nicht gestörten Zustandsgrößen zunächst kurzzeitig in gleicher Richtung aber bei kleinen Amplituden wie bei einem freien ungesteuerten Körper verlaufen; anschließend sollen diese Variablen ebenfalls stark gedämpft aperiodisch ihrem stationären Wert zustreben. — Infolge der Massenträgheit des Ruders wird der Grad der Nennerdeterminanten D_1 bzw. D_2 in (10) um 2 Potenzen erhöht; in diesem Falle übt der gesteuerte starre Körper gegenüber einer Störung anfänglich langsamer eine Gegenwirkung aus als bei vernachlässigbarer Rudermasse.

Diese Berechnungsmethode bedarf einer gewissen Erweiterung, wenn das Ruderorgan mit einer Verzögerungszeit t_1 auf einen Steuerbefehl antwortet:

$$\Delta\xi = 0 \qquad \text{für } t < t_1$$

$$\Delta\xi = C \cdot \Delta Y_k(t - t_1) \qquad \text{für } t \geq t_1\,.$$

Mit $y_k = \mathfrak{L}\{\Delta Y_k\}$, nimmt in (6) die i-te Zeile die Form an:

$$(a_{ik} + a_{i7}\, C\, e^{-\tau_1 \lambda})\, y_k^* + \sum_{j=1}^{6} a_{ij}\, y_j^* = f_i\,, \qquad j \neq k \quad . \; . \; . \quad (6c)$$

($\tau_1 = t_1/t_S$). Die zugeordnete Frequenzdeterminante lautet somit

$$D = D_0 + C\, e^{-\tau_1 \lambda} \cdot D_k[a_{i7}] \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17).$$

[1]) Betreffs der Stabilitätsgröße $m_{\dot\alpha}$, welche i. a. mit $m_{\dot w}$ annähernd übereinstimmt, vgl. z. B. W. Bader, Die flugmechanische Stabilitätsbedingungen, Jb. 1939 d. deutschen Luftfahrtforschung I, 254—283.

Hierbei ist im allgemeinen Fall D_0 die durch (10) bestimmte 6-reihige Determinante, welche dem ungesteuerten Bewegungssystem zugeordnet ist, während $D_k[a_{i7}]$ diejenige Determinante ist, welche aus $|a_{ik}|$ hervorgeht, wenn in der k-ten Spalte die Glieder a_{ik} durch a_{i7} ersetzt werden. Die Auflösung von (6c) liefert

$$\left. \begin{aligned} y_j^* &= \frac{D_j[f_i] + C e^{-\tau_1 \lambda} D_{j;k}[f_i; a_{i7}]}{D_0 + C e^{-\tau_1 \lambda} D_k[a_{i7}]}, \qquad j \neq k \\ y_k^* &= \frac{D_k[f_i]}{D_0 + C e^{-\tau_1 \lambda} D_k[a_{i7}]} \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots (13a).$$

Hierbei geben die Indizes in den Determinanten D diejenigen Spalten an, welche durch die in den eckigen Klammern stehenden Größen ersetzt werden sollen; in $D_{j;k}[f_i; a_{i7}]$ ist demgemäß die j-te Spalte in $|a_{ik}|$ durch die Größen f_i und die k-te Spalte durch die Größen a_{i7} zu ersetzen. Somit sind die D ganze rationale Funktionen niedrigeren Grades als D_0. Die Laplace-Transformierten der abhängigen Variablen nehmen nach (13a) für beliebiges j die Form an

$$y_j^* = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \tau_1 \lambda} \sum_{\nu=1}^{\infty} e_{n,j}^{(\nu)} \lambda^{-\nu} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15a).$$

Die formale Rücktransformation von (15a) bereitet keine Schwierigkeit: jeweils nach einem ganzen Vielfachen der Zeit τ_1 ist eine weitere Summe in (15a) zu berücksichtigen. Da die Doppelsumme für hinreichend große Werte von $|\lambda|$ konvergiert, stellen die Ausdrücke (16) die Lösung der Aufgabe dar. Zunächst gilt wie früher für beliebiges j

$$\mathfrak{L}^{-1}\{y_j^*(\lambda)\} = \sum_{\nu} c_{0,j}^{(\nu)} \frac{\tau^{\nu-1}}{(\nu-1)!}, \qquad 0 \leq \tau < \tau_1 \quad . . (16a).$$

Die Aufschaltungskonstante C tritt hierbei nicht auf, so daß wie gefordert die gestörte Bewegung zunächst ungesteuert verläuft. Nach Ablauf der Verzögerungszeit wird

$$\mathfrak{L}^{-1}\{y_j^*(\lambda)\} = \sum_{\nu} c_{0,j}^{(\nu)} \frac{\tau^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + \sum_{\nu} c_{1,j}^{(\nu)} \frac{(\tau-\tau_1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}, \qquad \tau_1 \leq \tau < 2\tau_1 \quad . (16b).$$

Auch hier ist der Anwendbarkeit der so entstehenden Ausdrücke dadurch eine Grenze gesetzt, daß die Berechnung der Koeffizienten $c_{n,j}^{(\nu)}$ mit zunehmendem ν schwieriger wird. Für die Untersuchung technisch ausgeführter Steuerungen spielt dieser Umstand jedoch keine so große Rolle, da die Nachhinkezeit t_1 durch entsprechende Bauweise der Steuerorgane klein gegenüber der Größe t_S gehalten wird; daher kann im gewissen Umfang für Zeiten $\tau < 1$ der charakteristische Einfluß der Verzögerungszeit auf den Bewegungsverlauf erfaßt werden. — Die mathematische Behandlung bleibt natürlich im wesentlichen unverändert, wenn anstelle der Zustandsgröße Y_k deren zeitliche Ableitung $\dot{Y}_k$ gewählt wird; das gleiche gilt für die Behandlung einer Proportionalregelung mit Stellgeschwindigkeitszuordnung ($\Delta\dot{\xi} = K \cdot \Delta Y_k$).

Eingegangen am 20. September 1951.

KLEINE MITTEILUNGEN

Verhinderte Torsionsverwölbung

„Aufgefrischt"

Bei Stäben mit praktisch vorkommenden Querschnitten ist bei Torsionsbeanspruchung der Zusammenhang zwischen der Drillung ϑ, dem Moment M und der Querschnittsverwölbung bekannt. Es wird hier ein Weg gezeigt, wie mit dieser Kenntnis der Einfluß der verhinderten Verwölbung zu untersuchen ist.

Als anschauliches klassisches Beispiel nehme ich nach Timoshenko (s. Z. Math. u. Phys. 58 (1910), S. 361) einen Stab mit I-Querschnitt (Bild 1). Das Torsionsmoment in der rechten Hälfte ist M; der Anteil M_t wird durch reine Torsion, der Anteil M_s durch Schubspannungen in den Flanschen übertragen; es ist $M_t + M_s = M$.

Durch Torsion entsteht eine veränderliche Drillung $\vartheta(z) = \frac{M_t}{J_t G}$ mit $J_t = \frac{1}{3}\sum d^3 b$ (d Dicke der rechteckigen Querschnittsteile, b Länge derselben). ϑ ist eine Funktion von z und nimmt vom Werte $\vartheta(z=0)=0$ bis zum Maximalwerte $\vartheta(z=l)$ zu. Infolge der Drillung ϑ werden die Flanschquerschnitte um die y-Achse um die Winkel $\pm\varphi = \frac{h}{2}\vartheta$ gedreht, so daß sie senkrecht zu den Längsfasern ihrer Mittelpunkte sind. In den Flanschquerschnitten entstehen Querkräfte Q, die den zweiten Momentenanteil $M_s = Qh$ bilden. Die Winkel φ können wir auch als Folge der Biegung der Flansche auffassen, die wir als getrennte Balken betrachten. Wir erhalten mit

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{h}{2}\frac{d\vartheta}{dz} = -M_{Flansch}\Big/\frac{1}{2}J_y E\,; \quad dM_{Flansch}/dz = Q$$

folglich

$$M_s = Qh = -\left(\frac{h}{2}\right)^2 J_y E \frac{d^2\vartheta}{dz^2}.$$

M_t und M_s sind hiermit in Abhängigkeit von ϑ

gegeben. Somit erhalten wir bei gegebenem M:

$$M = M_t + M_s = J_t G\,\vartheta - \left(\frac{h}{2}\right)^2 J_y E \frac{d^2\vartheta}{dz^2}.$$

Hieraus

$$\vartheta = \frac{M}{J_t G}(1 + A \operatorname{Cof} \alpha z + B \operatorname{Sin} \alpha z)$$

$$= \frac{M}{J_t G}\left(1 - \frac{\operatorname{Cof} \alpha \cdot (l-z)}{\operatorname{Cof} \alpha l}\right)$$

mit

$$\alpha^2 = \frac{J_t G}{\left(\frac{h}{2}\right)^2 J_y E}.$$

A und B sind auf Grund der zwei Randbedingungen $\vartheta = 0$ für $z = 0$ und $M_{Flansch} = 0$, bzw. $\frac{d\vartheta}{dz} = 0$ für $z = l$ gefunden.

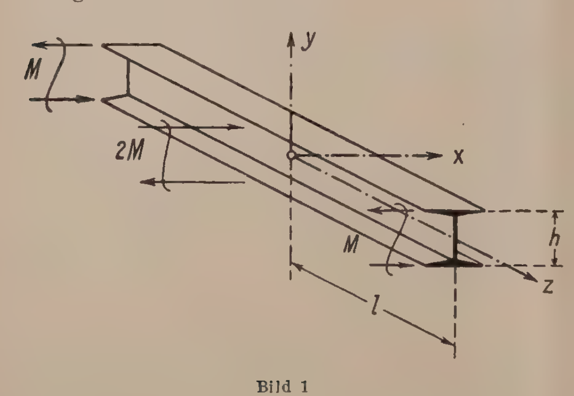


Bild 1

Von Wichtigkeit ist die Bestimmung des Wertes α; ist dieser gefunden, so folgen hieraus alle weiteren Größen, wie der Verlauf der Verdrehung des Stabes und die Normalspannungen σ_z, die im Querschnitt $z = 0$ die Verwölbung rückgängig machen.

Bei unserem Beispiele mußten wir die Anschauung zu Hilfe nehmen und uns vorstellen, wie die Flansche sich verbiegen. Das geht bei vielen Querschnitten überhaupt nicht, z.B. geschlossenen oder mehrfach zusammenhängenden Querschnitten.

Ich will nun einen Weg zeigen, der es gestattet, ohne Anschauung den Wert α zu bestimmen. Hierzu benützen wir den Satz vom Minimum der potentiellen Energie.

Bekannt sei für den tordierenden Stab das Torsionsflächenmoment (ich kenne keine bessere Bezeichnung) J_t und die Querschnittsverwölbung $w(x, y)$. Für letzte gilt

$$\int w\,df = 0, \quad \int w\,x\,df = 0, \quad \int w\,y\,df = 0.$$

Die Bezugsebene bzw. Ausgleichsebene ist in bekannter Weise entsprechend zu wählen.

Es ist also

$$M_t = J_t G\,\vartheta \quad \text{und} \quad w = f(x, y)\,\vartheta.$$

Hierin ist wie bei dem Beispiele:

$$\vartheta = \vartheta_t\left(1 - \frac{\operatorname{Cof} \alpha\,(l-z)}{\operatorname{Cof} \alpha l}\right).$$

Nun stellen wir die potentielle Energie für den Stab von $z = 0$ bis $z = l$ auf, berücksichtigen dabei die elastische Energie infolge der Torsion und infolge der verhinderten Querschnittsverwölbung und die potentielle Energie des Momentes am freien Ende.

Die potentielle Energie der Torsion wird

$$\frac{1}{2}\int_0^l \vartheta\,M_t\,dz = \frac{1}{2} J_t G \int_0^l \vartheta^2\,d_t$$

$$= \frac{1}{2}\vartheta_t^2 J_t G \int_0^l \left(1 - \frac{\operatorname{Cof} \alpha(l-z)}{\operatorname{Cof} \alpha l}\right)^2 \cdot dz.$$

Für das Moment am freien Ende erhalten wir

$$-M\int_0^l \vartheta\,dz = -\vartheta_t^2 J_t G \int_0^l \left(1 - \frac{\operatorname{Cof} \alpha(l-z)}{\operatorname{Cof} \alpha l}\right) dz.$$

Beide Ausdrücke zusammen geben

$$-\frac{1}{2}\vartheta_t^2 J_t G \int_0^l \left(1 - \frac{\operatorname{Cof}^2 \alpha\,(l-z)}{\operatorname{Cof} \alpha\,l}\right) dz$$

$$= -\frac{1}{2}\vartheta_t^2 J_t G l\left(1 - \frac{1 + (\operatorname{Sin} \alpha l \operatorname{Cof} \alpha l)/\alpha}{2 \operatorname{Cof}^2 \alpha l}\right)$$

Infolge der veränderlichen Verwölbung treten Längsdehnungen $\varepsilon_z = \partial w/\partial z$ und Längsspannungen $\sigma_z = \varepsilon_z E$ auf; die übrigen Spannungen werden als bedeutungslos angenommen. Hiermit wird die elastische Energie der Dehnungen

$$\frac{1}{2}\iiint \varepsilon_z\,\sigma_z\,dx\,dy\,dz = \frac{E}{2}\iiint \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\vartheta_t^2 E \iint f^2(x, y)\,dx\,dy \int_0^l \alpha^2 \frac{\operatorname{Sin}^2 \alpha\,(l-z)}{\operatorname{Cof}^2 \alpha l}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\vartheta_t^2 K_s E\,l \frac{\alpha \operatorname{Sin} \alpha l \operatorname{Cof} \alpha l - \alpha^2}{2 \operatorname{Cof}^2 \alpha}$$

mit der Abkürzung

$$K_s = \iint f^2(x, y)\,dx\,dy.$$

Die potentielle Energie wird hiermit

$$\frac{1}{2}\vartheta_l^2\left[-J_t G\,l\left(1 - \frac{1 + (\operatorname{Sin} \alpha\,l \operatorname{Cof} \alpha\,l)/\alpha}{2 \operatorname{Cof}^2 \alpha\,l}\right) + K_s E l \frac{\alpha \operatorname{Sin} \alpha l \operatorname{Cof} \alpha l - \alpha^2}{2 \operatorname{Cof}^2 \alpha l.}\right].$$

Der Wert α muß so bestimmt werden, daß die potentielle Energie zum Minimum wird. Wir differentiieren den Ausdruck nach α, setzen das Ergebnis gleich Null und finden

$$\alpha^2 = \frac{J_t G}{K_s E}.$$

Die verwickelten Ausdrücke nach der Differentiation heben sich fort und es bleibt für α — wie man voraussehen konnte — nur der einfache Ausdruck nach.

Ich bezeichne J_t [cm⁴] als Torsionsflächenmoment und K_s [cm⁴] als Verwindungswert der Fläche.

Für den I-Querschnitt bestimmen wir

$$K_s = \iint f^2(x, y)\,dx\,dy$$

aus der oberen Querschnittshälfte. Hierbei ist

$$f(x, y) = \frac{h}{2}x$$

und damit

$$\frac{1}{2}K_s = \iint \left(\frac{h}{2}\right)^2 x^2\,dx\,dy = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{1}{2} J_y.$$

Somit (wie auch auf schaulichem Wege):

$$\alpha^2 = \frac{J_t\,G}{(h/2)^2\,J_y\,E}.$$

Für den Rahmenquerschnitt nach Bild 2 wird

$$J_t = \frac{2\,s\,a^2\,b^2}{a+b}.$$

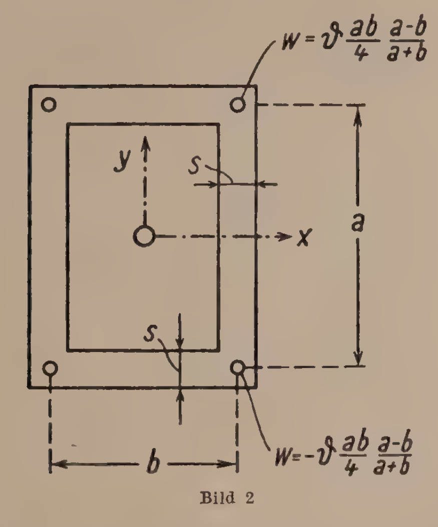


Bild 2

Die Verwölbung ist durch die Verwölbung der vier Eckpunkte, die im Bilde angegeben sind, bestimmt. Für die rechte Rahmenseite erhalten wir für K_s den Anteil:

$$\int_{-a/2}^{+a/2} s\left(\frac{a\,b}{4}\,\frac{a-b}{a+b}\right)^2\left(\frac{J}{a/b}\right)^2 dy = s\left(\frac{a\,b}{4}\,\frac{a-b}{a+b}\right)^2\frac{a}{3}.$$

Somit für alle vier Seiten

$$K_s = \frac{s\,a^2\,b^2}{24}\,\frac{(a-b)^2}{a+b}$$

und

$$\alpha^2 = \frac{J_t\,G}{K_s\,E} = \frac{48}{(a-b)^2}\,\frac{G}{E}.$$

München-Pullach C. Weber

Über den Zusammenhang zwischen Ausschlag und Schwingungsdauer bei der freien ungedämpften Schwingung.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Es soll gezeigt werden, daß es auch analytische Funktionen $f(x)$ gibt, die nicht von der Form $c\,x$ sind, bei denen also das Potential $F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$ nicht die Gestalt $\frac{c}{2}\,x^2$ hat, so daß die D.-Gl. (1) periodische Lösungen $x(t+T) \equiv x(t)$ besitzt, bei denen die Schwingungsdauer T in einem gewissen endlichen x-Bereich der Kennlinie $f(x)$ unabhängig vom Ausschlag a ist[1].

Daß es solche „nichttrivialen" Lösungsfunktionen $f(x) \neq cx$ für dieses Problem gibt, wenn man nicht fordert, daß $f(x)$ analytisch ist, hat bereits C. Weber in seinem Aufsatz über „Zwei Probleme mit gleicher Lösung"[2] gezeigt. Dabei wurde $f(x)$ als ungerade Funktion, $f(-x) = -f(x)$, angenommen und von der Funktion $T(a)$ (Schwingungsdauer in Abhängigkeit vom Ausschlag) nur gefordert, daß sie in einem Intervall $a' < a < a''$ konstant, aber sonst beliebig sei. Man kann zeigen, daß sich die Funktion $f(x)$ asymptotsich der Geraden $\frac{4\pi^2}{(T(a'))^2}\,x$ nähert, wenn man a'' gegen Unendlich gehen läßt. In dem Falle einer ungeraden Kennlinie, $f(-x) = -f(x)$, wird man wegen des Zusammenhanges von Schwingungsdauer und Ausschlag

$$T(a) = 2\sqrt{2}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{F(a) - F(x)}}$$

im allgemeinen nicht erwarten, daß $F(x)$ und damit auch $f(x)$ eine analytische Funktion wird, wenn man $T(a) = \text{const.}$ für $a' < a < a''$, aber $T(a) \neq \text{const.}$ für alle anderen a verlangt.

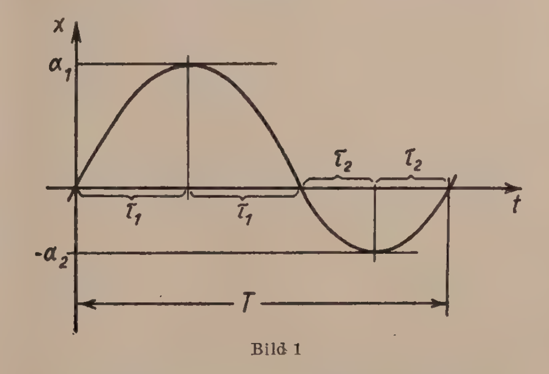


Bild 1

Wir betrachten nun den Fall einer stetigen Kennlinie $f(x)$, die nicht punktsymmetrisch zum Nullpunkt zu sein braucht. Es soll aber $f(0) = 0$ und in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes, $-b' \leq x \leq b''$, $(b', b'' > 0)$, $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} x$ sein. Dann hat die D.Gl.(1) für alle Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ mit $\dot{x}_0^2 \leq 2\,\mathrm{Min}\,(F(-b'), F(b''))$ sicher periodische Lösungen $x(t+T) \equiv x(t)$. Da eine solche periodische Lösung symmetrisch zu den Ordinaten $t = \tau_1$ und $t = 2\,\tau_1 + \tau_2$ im Maximum bzw. Minimum von $x(t)$ ist (siehe Bild 1), ist die Gesamtschwingungsdauer (kleinste Periode) $T = 2\,(\tau_1 + \tau_2)$. Wir erhalten also die Gleichung:

$$T = 2\,(\tau_1(a_1) + \tau_2(a_2))$$

$$= \sqrt{2}\left\{\int_0^{a_1}\frac{dx}{\sqrt{F(a_1) - F(x)}} - \int_0^{-a_2}\frac{dx}{\sqrt{F(-a_2) - F(x)}}\right\} \quad (2)$$

Nun sind wegen der Voraussetzung über $f(x)$ in dem betrachteten Bereich die Ausschläge a_1 und a_2 monotone Funktionen der Anfangssteigung $\dot{x}_0 : a_1(\dot{x}_0)$, $a_2(\dot{x}_0)$ mit $a_1' > 0$ und $a_2' > 0$ für $\dot{x}_0 > 0$. Ferner ist nach dem Energiesatz $\frac{\dot{x}^2}{2} + F(x) = \frac{\dot{x}_0^2}{2}$ in den Extremstellen $(\dot{x} = 0) : F(a_1) = F(-a_2) = v(\dot{x}_0)$, und v wächst monoton mit zunehmendem $\dot{x}_0$. Es ist daher möglich, T als eindeutige Funktion von $\dot{x}_0$ oder v darzustellen.

Wir setzen nun

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) > 0 & \text{für } x > 0 \\ f_2(x) < 0 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und $$F_\nu(x) = \int_0^x f_\nu(x)\,dx \qquad (\nu = 1, 2).$$

[1]) In dem Aufsatz „Über den Zusammenhang von Schwingungsdauer und Rückstellkraft" (Z. angew. Math. Mech. 28 (1948) S. 94), und in der Erwiderung zu einer Bemerkung dazu von C. Weber (Z. angew. Math. Mech. 29 (1949), S. 96) behauptet G. Plato, daß bei nichtquadratischem Potential in keinem Intervall der Form $a_1 < a < a_2$ die Funktion $T(a)$ konstant sein kann, wenn man sich auf den Fall eines durch eine Potenzreihe darstellbaren Potentials beschränkt. Dies wird hier durch ein Beispiel widerlegt.

[2]) C. Weber, Z. angew. Math. Mech., 28 (1948), S. 373.

Nehmen wir nun an, daß $f_2(x)$ punktsymmetrisch ist (bzw. spiegeln wir f_2 am Nullpunkt), so ist

$$F_2(x) = \int_0^{-x} f_2(x)\,dx = \int_0^{x} f_2(x)\,dx\,.$$

Wir erhalten dann aus (2)

$$T = \sqrt{2}\left\{\int_0^{a_1}\frac{dx}{\sqrt{v - F_1(x)}} + \int_0^{a_2}\frac{dx}{\sqrt{v - F_2(x)}}\right\}.$$

$F_1(x)$ und $F_2(x)$ sind wieder monotone Funktionen von x in dem betrachteten Intervall wegen der Voraussetzung: $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} x$. Wir können sie daher als neue Veränderliche einführen und erhalten, wenn wir die Umkehrfunktionen mit $x_1(F)$ bzw. $x_2(F)$ bezeichnen,

$$T(v) = \sqrt{2}\left\{\int_0^{v}\frac{x_1'(z)\,dz}{\sqrt{v - z}} + \int_0^{v}\frac{x_2'(z)\,dz}{\sqrt{v - z}}\right\} \qquad (3).$$

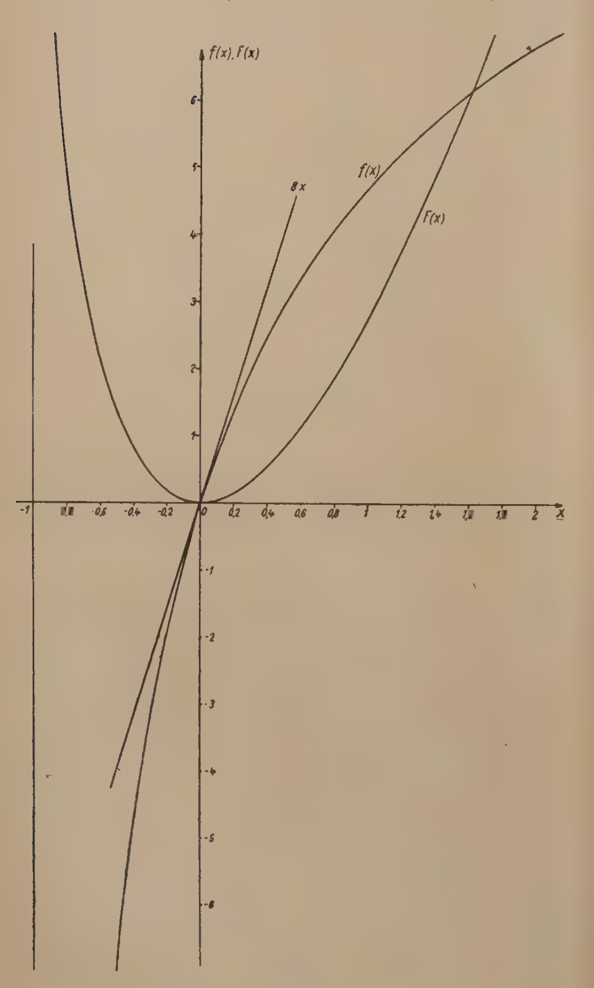


Bild 2

Durch Multiplikation mit $\dfrac{1}{\sqrt{V - v}}$ und Integration über v von 0 bis $V \leq \text{Min}\,(F(-b'), F(b''))$ erhalten wir nach der Abelschen Methode[3]) aus (3)

$$\int_0^V \frac{T(v)\,dv}{\sqrt{V - v}} = \sqrt{2}\,\pi \int_0^V (x_1'(z) + x_2'(z))\,dz\,.$$

[3]) Siehe hierzu z.B. G. Kowalewski, Integralgleichungen, Leipzig und Berlin 1930, S. 12 f. oder W. Schmeidler, Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Leipzig 1950, S. 213.

Durch partielle Integration findet man, wenn man voraussetzt, daß $T(v)$ differenzierbar ist, und wegen $x_1(0) = x_2(0) = 0$:

$$\sqrt{2}\,\pi\,(x_1(V) + x_2(V)) = 2\sqrt{V}\,T(0) + 2\int_0^V \sqrt{V - v}\,T'(v)\,dv\,.$$

Fordern wir nun $T(v) = \text{const.}$, also $T'(v) = 0$, für $0 \leq v \leq V$, so fällt das letzte Integral fort, und wir haben als Bedingung dafür, daß bei beliebigem Ausschlag die Schwingungszeit konstant bleibt:

$$\underline{x_1(V) + x_2(V) = A\sqrt{V}}, \quad \text{wobei } A = \frac{\sqrt{2}\,T(0)}{\pi} \text{ ist} \quad (4).$$

Diese Gleichung kann nun auf mannigfache Weise erfüllt werden. Insbesondere haben wir für $x_1(V) \equiv x_2(V)$ wieder die triviale Lösung

$$V(x) = \frac{2\pi^2}{T_0^2}\,x^2, \quad \text{also} \quad f(x) = V'(x) = \frac{4\pi^2}{T_0^2}\,x\,.$$

Die Funktion $x_1(V)$ ist jedoch weitgehend frei wählbar. Man braucht von ihr nur zu fordern, daß sie für $0 \leq V \leq V_1$, $V_1 \leq \text{Min}\,(F(-b'), F(b''))$, definiert ist, dort überall einen eindeutigen vorderen Differentialquotienten besitzt und den Bedingungen genügt:

$$x_1(0) = 0, \; \frac{A}{2\sqrt{V}} > x_1'(V) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < V \leq V_1 \;.\;.\; (5).$$

Soll $f(x)$ jedoch stetig sein, so muß $x_1(V)$ in dem Intervall $0 < V \leq V_1$ überall differenzierbar sein, den Gleichungen (5) genügen, und es muß außerdem $x_1'(0) = \infty$ sein. Aus (4) erhält man dann das zugehörige $x_2(V)$. Es lassen sich nun wegen (5) die Umkehrfunktionen $V_1(x_1)$ und $V_2(x_2)$ bilden. Die gesuchte Funktion $f(x)$ ist dann gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} V_1'(x) & \text{für } x > 0 \\ -V_2'(-x) & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für das so konstruierte $f(x)$ hat die D.Gl. (1) bei den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ mit $\dot{x}_0^2 \leq 2\,\text{Min}\,(F(-b'), F(b''))$ oder auch den entsprechenden Anfangsbedingungen wie z.B. $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$ mit $-b' \leq a \leq b''$ usw. periodische Lösungen, deren Schwingungsdauer gleich $T(0)$, unabhängig vom Ausschlag ist.

Nun kann man natürlich nicht erwarten, daß bei Vorgabe einer beliebigen Funktion $x_1(V)$, die den Bedingungen (5) genügt und für die $x_1'(0) = \infty$ ist, eine analytische Funktion $f(x)$ herauskommt. Damit $f(x)$ eine analytische Funktion wird, muß außerdem die Beziehung bestehen:

$$V_1'(x) \equiv -V_2'(-x)\,.$$

Daß es solche Funktionen tatsächlich gibt, möge folgendes Beispiel zeigen, bei dem alle Operationen noch elementar durchführbar sind:

Wir setzen $\qquad x_1(V) = A\left(\frac{1}{2}\sqrt{V} + cV\right)$

dann wird nach (4) $\qquad x_2(V) = A\left(\frac{1}{2}\sqrt{V} - cV\right)$.

x_1 und x_2 erfüllen dann alle notwendigen Bedingungen. Man erhält aus diesen Gleichungen:

$$V_1(x) = \frac{1}{A\,c}\,x + \frac{1}{8c^2} - \frac{1}{8c^2}\sqrt{1 + \frac{16\,c}{A}\,x}$$

und $$V_2(x) = \frac{-1}{A\,c}\,x + \frac{1}{8c^2} - \frac{1}{8c^2}\sqrt{1 - \frac{16\,c}{A}\,x}\,.$$

Das positive Vorzeichen der Wurzel kommt wegen $V_1(0) = V_2(0) = 0$ nicht in Frage. Durch Differentiation findet man:

$$V_1'(x) = \frac{1}{A\,c} - \frac{1}{A\,c\sqrt{1+\frac{16\,c}{A}\,x}}$$

und
$$V_2'(x) = \frac{-1}{A\,c} + \frac{1}{A\,c\sqrt{1-\frac{16\,c}{A}\,x}}.$$

In der Tat ist hier $-V_2'(-x) \equiv V_1'(x)$. Die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{A\,c} - \frac{1}{A\,c\sqrt{1+\frac{16\,c}{A}\,x}} \quad \text{mit} \quad A > 0,\ c \neq 0,$$

beliebig, sind also so beschaffen, daß die D.Gl. $\ddot{x} + f(x) = 0$ für alle Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ mit

$$|\dot{x}_0| < \left|\frac{1}{2\sqrt{2}\,c}\right|,$$

bzw. den entsprechenden Anfangsbedingungen wie z. B. $\dot{x}_0 = 0$, $x_0 = a$ mit $\frac{-A}{16\,c} < a < \frac{3\,A}{16\,c}$ für $c > 0$ bzw. $\frac{3\,A}{16\,c} < a < \frac{-A}{16\,c}$ für $c < 0$ nur periodische Lösungen hat mit der konstanten Periode $T = T(0) = \frac{\pi\,A}{\sqrt{2}}$.

Hierzu ein kurzes Zahlenbeispiel:

$$A = 1, \quad c = \frac{1}{16}, \quad f(x) = 16\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right),$$

$$F(x) = 16\,(x - 2\sqrt{1+x} + 2)$$
(s. Bild 2).

Dann ist $t(x)$ gegeben für den positiven Ast $0 \leq x \leq a_1$ durch

$$t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{\dot{x}_0}{4\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{\dot{x}_0^2}{32} - 2 - x + 2\sqrt{1+x}} + \arcsin\left[\frac{4\sqrt{2}}{\dot{x}_0}\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\right]\right\}$$

und für den negativen Ast $0 \geq x \geq -a_2$ durch

$$t - 2\,\tau_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{-\dot{x}_0}{4\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{\dot{x}_0^2}{32} - 2 - x + 2\sqrt{1+x}} + \arcsin\left[\frac{4\sqrt{2}}{\dot{x}_0}\left(1 - \sqrt{1+x}\right)\right]\right\}$$

bei den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 > 0$. Die 2. Hälfte des positiven bzw. negativen Bogens ist jeweils symmetrisch zur ersten. Die Periode T ist für alle Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{x}_0$ mit $|\dot{x}_0| < \sqrt{32}$ konstant und gleich $T_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

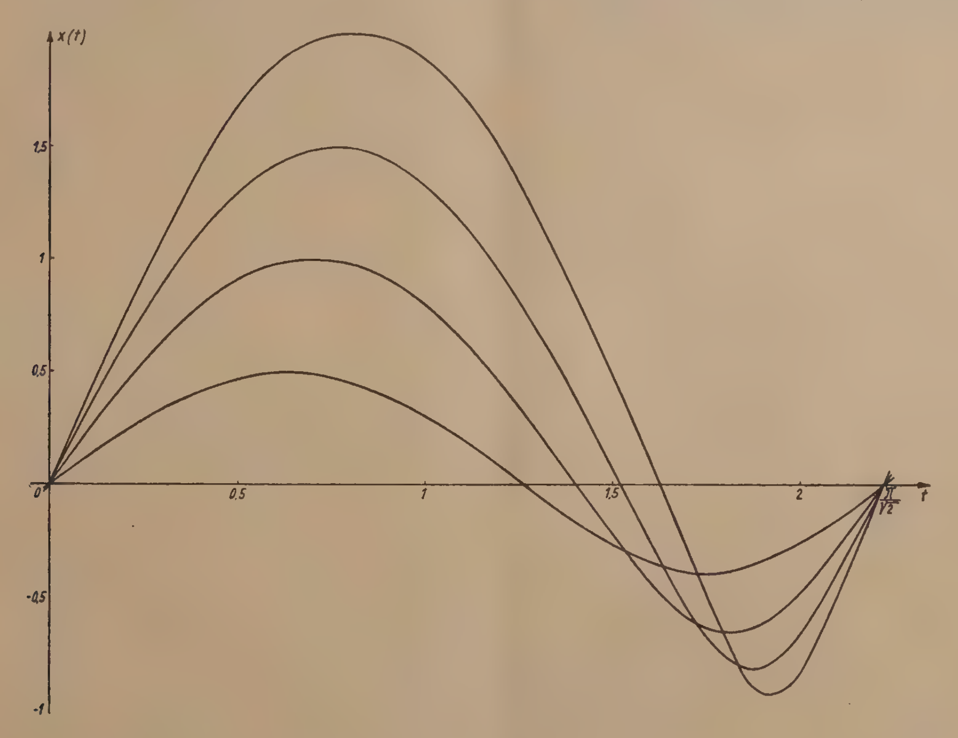


Bild 3

Bild 3 zeigt die vier Lösungskurven

Nr.	a_1	$-a_2$	$\dot{x}_0$	τ_1	τ_2
1	0,5	−0,39901	1,27147	0,63483	0,47591
2	1	−0,65687	2,34319	0,70182	0,40892
3	1,5	−0,82456	3,28740	0,76083	0,34991
4	2	−0,92821	4,14111	0,81419	0,29655

Hannover. Hans Ehrmann.

Über projektive Papiere.

In der Nomographie bilden Leitertafeln und Netztafeln den Hauptanteil aller Darstellungen. Welcher Tafel man den Vorzug gibt, hängt von der Natur der gestellten Aufgabe ab. Handelt es sich z. B. um die Auswertung einer aus mehreren Einzelwerten bestehenden Messung, dann wird man dies zweckmäßig in einer Netztafel durchführen, da sich daraus in

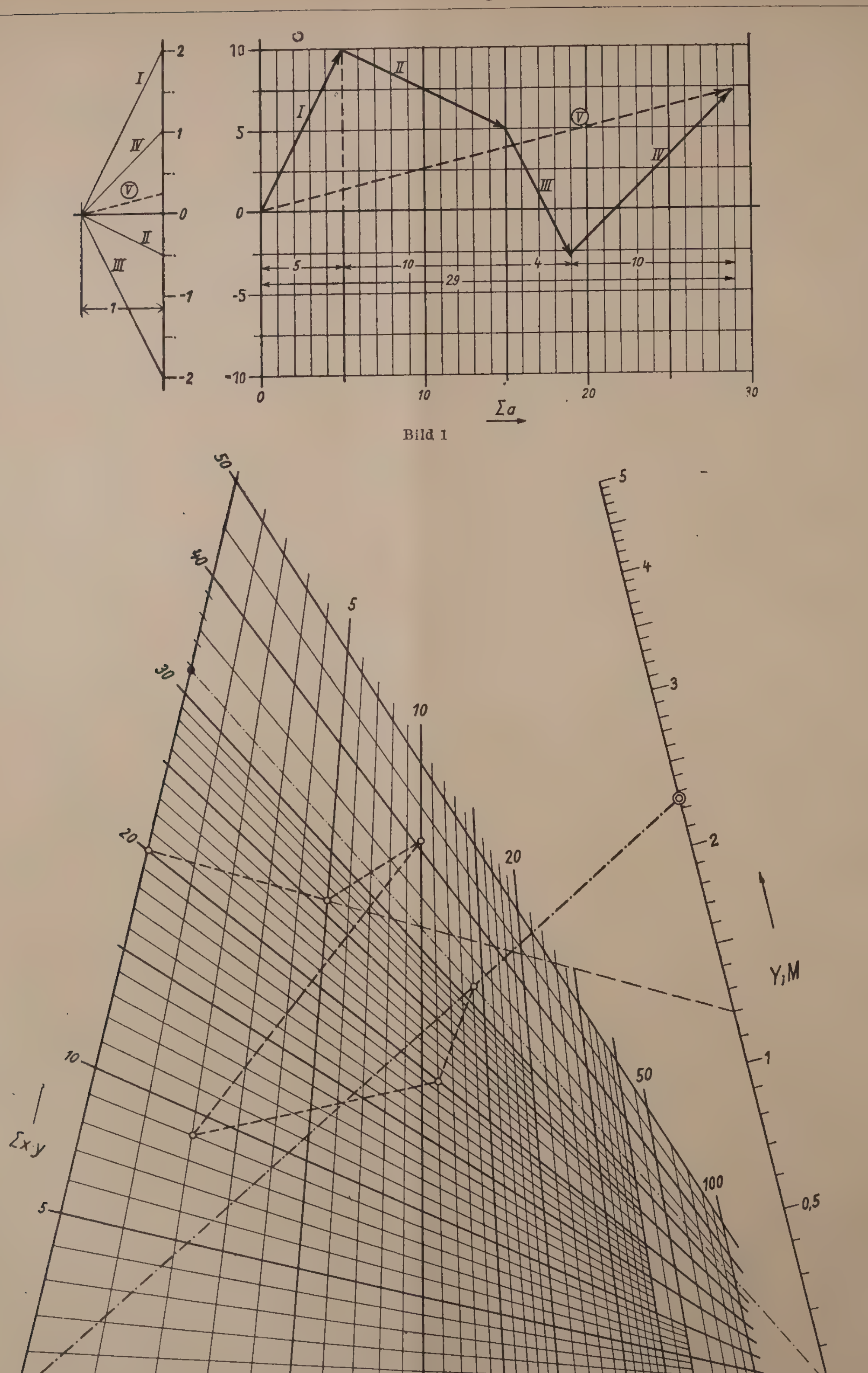


Bild 1

$$M = \frac{C + \Sigma x \cdot y}{\Sigma x}$$

Bild 3

vielen Fällen u. U. der mathematische Charakter des beobachteten Vorgangs erkennen läßt. In den meisten Fällen wird man den Mittelwert der Messungen benötigen, wobei es sehr erwünscht ist, Zwischenergebnisse fixieren und deuten zu können.

Liegt z. B. die Aufgabe vor, nachstehende Rechnung graphisch durchzuführen

$$y = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots a_n \cdot b_n}{a_1 + b_2 \dots a_n}, \quad \dots \quad (1)$$

dann kann man wie folgt vorgehen:

Man trägt den Faktor a in der Abszissenrichtung auf und betrachtet den Faktor b als Richtungsfaktor — Bild 1 —. Die Richtung wird mit Hilfe einer „Neben"-figur bestimmt und durch Parallelabsetzen in die Hauptfigur übertragen. Der Endpunkt des Linienzuges wird dann mit dem Koordinatenanfangspunkt verbunden, nach Parallelverschiebung dieser Schlußlinie in die „Neben"-figur liest man dort die Größe der mittleren Richtung, also den Mittelwert von b ab.

Übt man jedoch auf die Netztafel in der Abszissenrichtung eine Projektivität derart aus, daß die in

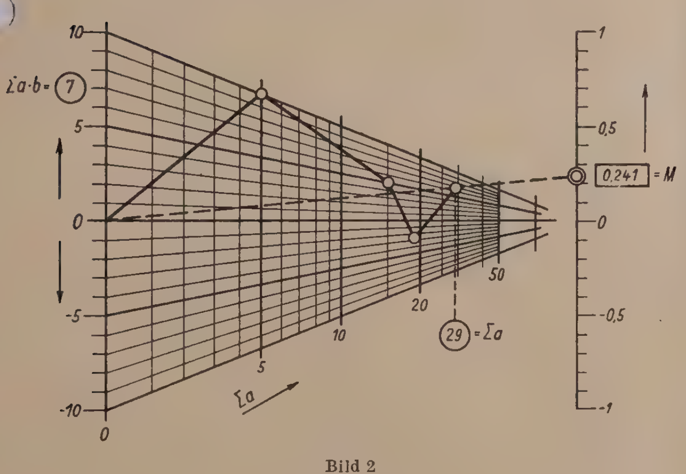


Bild 2

Bild 1 im Unendlichen liegende Anstiegsgerade im Zeichenfeld erscheint, dann erübrigt sich das Zeichnen der Nebenfigur, da nun ein Parallelenabsetzen nicht mehr erforderlich ist (Bild 2). Dieser Gedanke wurde erstmalig von Felix Wolf in die Praxis übersetzt [1]. Die theoretische und praktische Weiterentwicklung dieser Methode eröffnet zahlreiche Möglichkeiten, worüber in einem besonderen Aufsatz in den „Acta hydrophysica" ausführlich berichtet werden soll. In der vorliegenden kurzen Notiz soll vorerst nur ein Beispiel herausgegriffen werden. In Bild 3 ist ein projektiv verzerrtes Netz dargestellt, das zwei Fluchtpunkte aufweist, und zwar wurde die Ordinatenrichtung ebenfalls einer Projektion unterworfen, um den Bereich $0 < x \cdot y < 50$ brauchbar unterzubringen. Mit Hilfe dieses Papieres lassen sich Ausdrücke der folgenden Form darstellen

$$M = \frac{C + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n}{x_1 + x_2 + \dots x_n}$$

oder anders geschrieben

$$M = \frac{C + \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}.$$

Das eingezeichnete Beispiel entstand aus den Werten

$C = 20$
$x_1 = 5 \qquad y_1 = 1{,}2$
$x_2 = 5 \qquad y_2 = 3$
$x_3 = -8 \qquad y_3 = 4$
$x_4 = 9 \qquad y_4 = 1{,}2$
$x_5 = 3 \qquad y_5 = 4.$

Nach Ziehen der Schlußlinie ergibt sich ein M von 2,27. Der errechnete Wert lautet 2,2714.

Für den Zähler liefert das Netz den Wert 31,8 — während man für Σx 14 abliest.

Je nach den Funktionsteilungen der Koordinatenachsen lassen sich auf diese Art und Weise Mittelwerte von Summen, Produkten, Potenzen usw. bilden. Die Anwendung projektiv verzerrter Papiere liefert in Verbindung mit geringem zeitlichen Aufwand bei der Auswertung von Zahlenmaterial die Ergebnisse mit einer für die meisten Fälle der Praxis ausreichenden Genauigkeit.

[1] Felix Wolf: Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern III. Bd. 1923.

Berlin-Friedrichshagen. Joh. Fischer.

Die Rohrschelle, ihre Beanspruchung und Wirkung auf das Rohr unter Berücksichtigung eines anfänglichen Spieles.

Einleitung.

Herr Prof. Dr.-Ing. Rudolf Sonntag hat am Ende seines Aufsatzes „Über ein neuzeitliches Festigkeitsproblem des Apparatebaues"[1]) auf die Beanspruchung einer Rohrschelle (Bild 1) ohne Spiel hingewiesen. Die Rohrschelle ist ein offener Kreisring

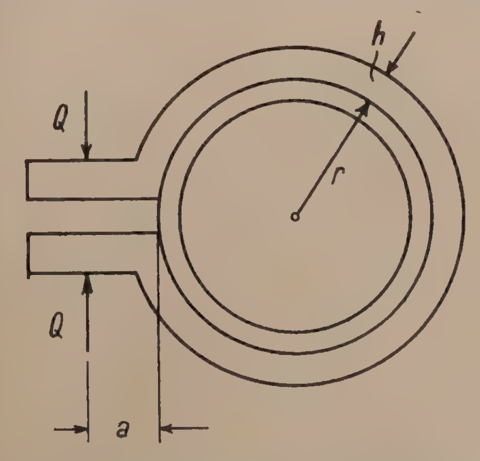


Bild 1. Rohrschelle mit den von der Klemmschraube ausgeübten Kräfte Q, (S. R. Sonntag Bild 10)

vom Radius r, der an seinen Enden durch je eine Längskraft Q und ein Biegungsmoment $Q \cdot a$ belastet ist (Bild 2), und durch die vom Rohr ausgeübten Auflagerkräfte im Gleichgewicht gehalten wird. Die wesentliche Erkenntnis für eine Rohrschelle ohne Spiel bestand darin, daß, solange ein Hebelarm $a > 0$, der Schließkraft Q existiert, eine gleichmäßig über den ganzen Ring wirkende Anpressung q_0 — selbst bei Reibungsfreiheit — nicht erreicht werden kann. Die gleichmäßige Anpressung q_0 erstreckt sich vielmehr nur über den Winkel $2(\pi - \varphi_0)$ des Rohres, und es treten zusätzlich konzentrierte Kräfte P_0 und P_1 auf.

Dem Verfasser lag vor einiger Zeit ein Industrieproblem vor, bei dem es vor allem darauf ankam, eine sehr kräftige und gleichmäßige Anpressung der Schelle um das Rohr unter Vermeidung konzentrierter Kräfte

[1]) Chemie – Ingenieur – Technik 1951, S. 135—139.

zu erreichen. Diese Aufgabe läßt sich nur bei einem Spiel und eindeutig bestimmbaren Belastungs- und Abmessungsverhältnissen erfüllen. Die Rechnung wird hier vereinfacht ohne Berücksichtigung der Krümmung und verschiedenen mittleren Radien von Rohr und Schelle durchgeführt. Anschließend wird der Einfluß der Nachgiebigkeit des Rohres geprüft und auf die experimentellen Möglichkeiten der Spannungsoptik hingewiesen.

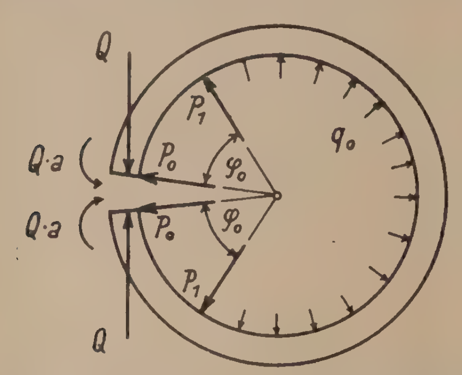


Bild 2. (S. R. Sonntag Bild 11.) Verteilung der vom Rohr auf die ohne Spiel angepaßte Schelle übertragenem Auflagerkräfte, hervorgerufen durch die Klemmkräfte Q (s. Bild 1)

Problemstellung.

Es sollen die Kräfte zwischen Rohr und Schelle unter Berücksichtigung eines Spieles Δr in Abhängigkeit der Schließkraft Q berechnet werden. Die Deformation des Rohres wird zunächst vernachlässigt; das ist sicher solange zulässig als das Rohr stärker als der Ring und dessen Durchmesser größer als seine Höhe ist. Für den besonders interessierenden Fall gleichmäßiger Pressung des Rohres soll für die breite Rohrschelle der Einfluß der Deformation des Rohres zusätzlich untersucht werden.

Solange Reibungskräfte in tangentialer Richtung t_1 vorhanden sind (herrührend vom Anspannvorgang), setzen diese den Reibungswiderstand der Schelle gegen axiale Verschiebung herab. Bezeichnen wir den axialen Verschiebungswiderstand eines Oberflächenelementes des Rohres mit t_2, so kann die aus der tangentialen Komponente t_1 und axialen Komponente t_2 resultierende Kraft die Reibungskraft nicht überschreiten, d. h.

$$\sqrt{t_1^2+t_2^2}=\mu q \quad \text{oder} \quad t_2=\sqrt{t_1^2-(\mu q)^2}.$$

Mit einer axialen Verschiebung der Rohrschelle tritt ein Abbau der tangentialen Reibungskräfte t_1 und damit eine Erhöhung des axialen Reibungswiderstandes t_2 ein bis der Umfang des Rohres frei von tangentialen Reibungskräften geworden ist. Wir können deshalb die Rechnung vereinfacht ohne Reibung durchführen.

Lösung des Problems.

Wir wollen den Vorgang der Schließung der Rohrschelle in vier Zustände unterteilen. Die Zeichnungen zeigen vereinfacht nur die eine Hälfte der symmetrischen Klemme.

I. Die Klemme beginnt das Rohr annähernd im Punkt $\varphi=\pi/2$ (ebenso Spiegelbild zur Symmetrielinie) zu berühren, und überträgt nur dort eine Kraft P_1 (Bild 3). Mit zunehmender Belastung nähert sich die Schelle dem Rohr bis sie es gleichzeitig in allen Punkten des Abschnittes $\varphi=\pi/2$ bis π berührt. Dieser Fall tritt dann ein, wenn

$$\left.\begin{array}{l} M=M_0=EJ\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+\Delta r}\right)\approx EJ\frac{\Delta r}{r^2} \\ S=S_0=0\;;\quad P_1=Q \qquad \text{dann ist} \\ \quad M_0=Q\,(a+r) \\ \quad \text{eingesetzt in obigen Ausdruck gibt} \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$Q=EJ\frac{\Delta r}{r^2(a+r)} \quad \ldots \quad (2).$$

J = Trägheitsmoment des Querschnittes der Schelle

Bis diese Anlage des ganzen Abschnittes $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bis π erreicht ist, wirkt nur P_1, also reine Nußknackerwirkung.

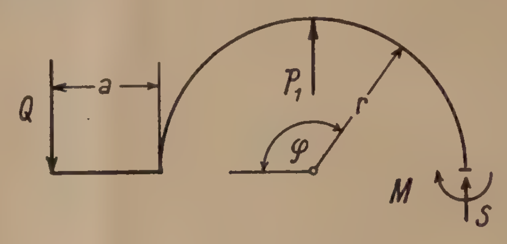


Bild 3. Zustand I $Q\leq EJ\frac{\Delta r}{r^2(a+r)}$

II. Die Schließkraft Q wird über den Wert

$$Q=EJ\frac{\Delta r}{r^2\,(a+r)}$$

gesteigert, dann kommt ein Teil der Klemme mit gleichmäßiger Druckwirkung q_0 zum Tragen, es bestehen darüber hinaus jedoch noch Einzellasten P_1 (Bild 4a).

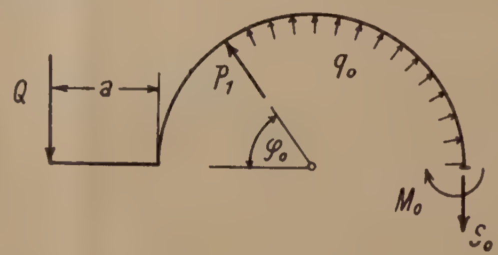


Bild 4a. Zustand II $EJ\frac{\Delta r}{r^2(a+r)}<Q<EJ\frac{\Delta r}{r^2 a}$

Es gilt aus Gleichgewichtsgründen

$$S_0=q_0\cdot r \quad \ldots \quad (3)$$

und für $\varphi>\varphi_0$

$$M=M_0=EJ\frac{\Delta r}{r^2}=Q\,[a+r\,(1-\cos\varphi_0)] \quad (4a),$$

daraus folgt die Bestimmungsgleichung für φ_0

$$\cos\varphi_0=\frac{Q\,(a+r)-EJ\,\Delta r/r^2}{Qr} \quad (4b).$$

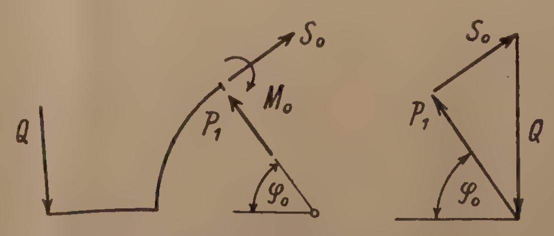


Bild 4b. Zustand II. Gleichgewichtsbetrachtung für den Abschnitt $\varphi=0$ bis $\varphi=\varphi_0$

P_1 und q_0 folgen aus einer Schnittbetrachtung $\varphi=\varphi_0$ (Bild 4b). Das Gleichgewicht der Kräfte verlangt

$$S_0=Q\cos\varphi_0\;;\quad q_0=\frac{Q\cos\varphi_0}{r}\;;\quad P_1=Q\sin\varphi_0 \quad (5).$$

Diese Gleichungen (5) gelten nur solange sich aus (4b) $0<\varphi_0<\pi/2$ ergibt.

Für $\varphi_0 = 0$ verschwindet die konzentrierte Kraft P_1 und es ergibt sich der günstige Sonderfall III bei dem allein eine gleichmäßige Anpressung der Schelle an das Rohr erzielt wird:

Ideale, gleichmäßige Anpressung der Schelle.

III. (Bild 5)

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= Q a = E J \frac{\Delta r}{r^2} \\ Q &= E J \frac{\Delta r}{a r^2}\ ; \quad S_0 = Q\ ; \quad q_0 = \frac{Q}{r} \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

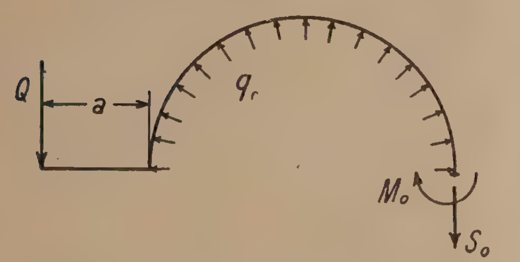


Bild 5. Zustand III. $Q = EJ \frac{\Delta r}{r^2 a}$

Wenn also eine bestimmte Pressung q_0 und damit Schließkraft Q vorgeschrieben sind, dann stehen als Konstruktionsfreiwerte zur Verfügung: Die Wandstärke h bzw. das Trägheitsmoment J, das Spiel Δr und der Hebelarm a der Schließe.

$$\frac{J \Delta r}{a} = \frac{Q r^2}{E}.$$

Besonders bei der Wahl des Spieles Δr ist darauf zu achten, daß beim Schließen die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird.

IV. Wird die Schließkraft weiter über den Wert

$$Q = E J \frac{\Delta r}{a r^2}$$

gesteigert, dann tritt wieder ein Abheben der Klemme vom Rohr ein, wobei jetzt konzentrierte Kräfte P_1 und P_0 auftreten (Bild 6a).

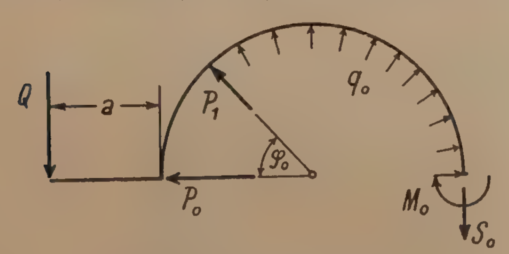


Bild 6a. Zustand IV. $Q > EJ \frac{\Delta r}{r^2 a}$

Es gilt wieder

$$S_0 = q_0 \cdot r\ ; \quad M_0 = E J \frac{\Delta r}{r^2} \quad . \ . \ . \ . \ (7).$$

Aus einer Gleichgewichtsbetrachtung der links von einem Schnitt $\varphi = \varphi_0$ wirkenden Kräfte und Momente (Bild 6b) folgt:

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= \frac{Q\,[a + r\,(1 - \cos \varphi_0)] - M_0}{r \sin \varphi_0} \\ S_0 &= Q \cos \varphi_0 + P_0 \sin \varphi_0 \end{aligned}\right\} \quad (8).$$

In die zweite der Gl. (8) P_0 eingesetzt, gibt

$$S_0 = Q\left[1 + \frac{a}{r}\right] - E J \frac{\Delta r}{r^3}\ ; \quad q_0 = \frac{S_0}{r} \quad (9).$$

Da die Querkraft für $\varphi > \varphi_0$ verschwindet, folgt

$$P_1 = Q \sin \varphi_0 - P_0 \cos \varphi_0 \ . \ . \ . \ . \ (10).$$

Es fehlt noch die Bedingungsgleichung für φ_0. Die Aufgabe ist statisch unbestimmt, weshalb wir auf die Formänderungen eingehen müssen. Der Bereich $\varphi = \varphi_0$ bis π liegt am Rohr an, was durch obige Bedingung $M_0 = JE\,\Delta r / r^2$ bereits erfüllt ist. Der zwischen P_0

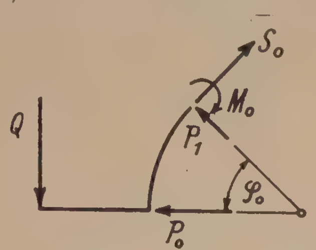


Bild 6b. Zustand IV, Schnittbetrachtung für den Abschnitt $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi_0$

und P_1 liegende Bereich $\varphi = 0$ bis φ_0 hebt sich vom Rohr ab und wir bestimmen φ_0 und damit P_0 und P_1 aus der Bedingung daß die Schelle für $\varphi = 0$ das Rohr wieder berühren muß, um die Kraft P_0 übertragen zu können.

Die Schelle muß also an der Stelle $\varphi = 0$ um $f = 2\,\Delta r$ im Durchmesser verkürzt sein. Nach einem Arbeitssatz[2]) der Mechanik lautet die gesuchte Bedingungsgleichung

$$\partial A / \partial P_0 = -2\,\Delta r \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (11),$$

worin A die im Klemmbogen $\varphi = 0$ bis π aufgespeicherte Formänderungsarbeit bedeutet. Es wird dabei genügen die Biegearbeit zu berücksichtigen, sie lautet

$$A = \int_0^{\pi} \frac{M^2}{2 E J} r \, d\varphi \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (12)$$

womit nach Einsetzen in (11)

$$\frac{\partial A}{\partial P_0} = \frac{r}{JE} \int_0^{\pi} M \frac{\partial M}{\partial P_0} d\varphi = -2\,\Delta r \qquad (13).$$

Die Durchführung der Rechnung ergibt die transzendente Bestimmungsgleichung für φ_0

$$\left.\begin{aligned} &2\left(\frac{a}{r} + 1\right)(\cos \varphi_0 - 1) + \sin^2 \varphi_0 + \\ &\left(1 + \frac{a}{r} - \cos \varphi_0\right)\left(\frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0} - \cos \varphi_0\right) = \\ &= \frac{M_0}{Q r}\left(\frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0} + \cos \varphi_0 - 2\right) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

in Übereinstimmung mit der Formel von R. Sonntag wenn entsprechend verschwindendem Spiel $\Delta r = 0$; $M_0 = 0$ gesetzt wird.

Mit zunehmender Belastung nimmt der Winkel φ_0 des sich vom Rohr abhebenden Bogens zu, bis für $Q = \infty$ als Grenzwert der Winkel erreicht ist, der sich nach R. Sonntag für $M_0 = 0$ ergibt.

Beispiel:

Wir wollen die vier beschriebenen Zustände an einem Beispiel verfolgen und die Kräfte $S_0 = r\,q_0$, P_1, P_0 sowie den Winkel als Funktion der Schließkraft Q in Bild 7 darstellen.

Wir legen der Rechnung die Abmessungen $r = 3$ cm, $h = 0{,}4$ cm, $a = 1{,}3$ cm zugrunde und setzen die Breite b der Schelle gleich der Einheit, d.h. $b = 1$ cm.

[2]) S. z. B. A. Föppl, „Vorlesungen über technische Mechanik", Bd. 3, R. Oldenbourg, München.

Wir beginnen mit dem Zustand I und erkennen, daß nur die Umschlingungskraft S_0 und damit die Anpressung q_0 linear und stetig über alle weiteren Zustände II—IV mit der Schließkraft Q zunimmt. Besonders interessiert die Umgebung des Zustandes III die wir als ideal bezeichnet haben, weil hier die konzentrierten Kräfte verschwinden. Wir erkennen, daß die konzentrierte Kraft P_1 beim Übergang vom Zustand II zu III [illegible] abfällt

$$(dP_1/dQ = -\infty \quad \text{für} \quad \varphi_0 = 0)$$

um dann sogleich im spitzen Winkel wieder anzusteigen. Ebenso nimmt die konzentrierte Kraft P_0 schnell zu. Es ist also äußerst schwierig den Idealfall III praktisch zu verwirklichen, da bereits geringe Abweichungen in der vorgeschriebenen Schließkraft und in den Herstellungstoleranzen zu erheblichen konzentrierten Kräften führen.

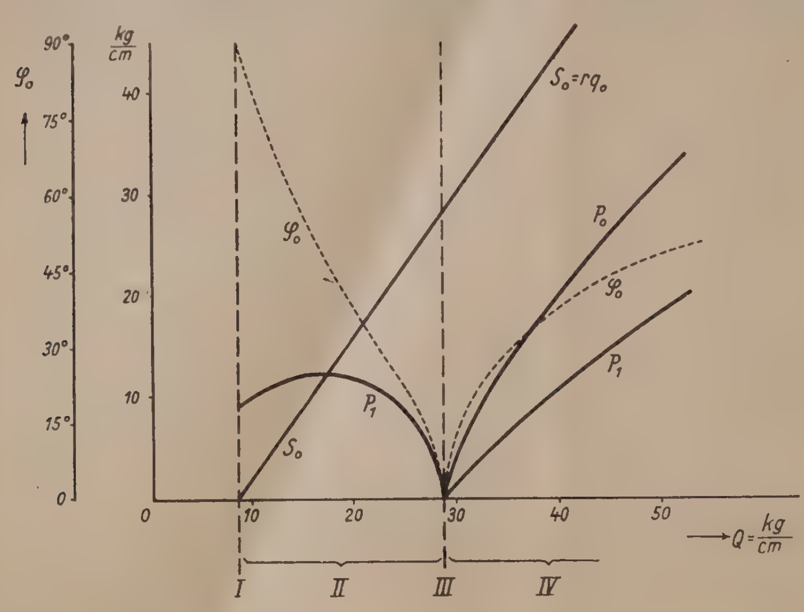


Bild 7. Die zwischen Rohrschelle und Rohr wirkenden Kräfte mit zunehmender Schließkraft Q. (Alle Größen auf eine Breite $b = 1$ cm der Schelle bezogen.) Abmessungen: $r = 3$ cm, $\Delta r = 0{,}03$ cm, $h = 0{,}4$ cm ($J = h^3/12$), $a = 1{,}3$ cm



Bild 8. Spannungsoptische Aufnahme eines Rohres mit Klemmschelle. Längs jeder Linie ist die Beanspruchung konstant. Sie ist proportional den eingetragenen Zahlen

Der Einfluß der Rohrverformung.

Für eine breite Rohrschelle soll im Idealzustand III der Einfluß der Rohrverformung untersucht werden. Die Rechnung wird wieder auf die Einheitbreite $b = 1$ bezogen. Wenn wir mit h_1 die Stärke der Schelle bezeichnen, dann folgt aus (6) für eine Pressung q_0 das Spiel Δr_1

$$\Delta r_1 = \frac{12\, q_0 \cdot a r^3}{E\, h_1^3} \qquad (15).$$

Unter der Pressung q_0 wird das Rohr der Wandstärke h_2 um einen Betrag Δr_2 zusammengedrückt

$$\Delta r_2 = \frac{q_0\, r^2}{h_2\, E} \quad . \quad (16).$$

Das wirkliche Spiel, das von der Schelle überwunden werden muß ist also $\Delta r = \Delta r_1 + \Delta r_2$. Das Herstellungsspiel muß demnach $\Delta r = \Delta r_1 - \Delta r_2$ betragen. Eine Berücksichtigung wird aber nur dann erforderlich sein, wenn Δr_2 mehr als 5% von Δr_1 beträgt. Wir erhalten durch Division der Gl. (15) (16):

$$\frac{\Delta r_2}{\Delta r_1} = \frac{h_1^3}{12\, a\, r\, h_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17).$$

Für obiges Rechenbeispiel ergibt sich, wenn $h_2 = 0{,}5$ cm angenommen wird $\Delta r_2/\Delta r_1 = 1/365$, also vernachlässigbar klein. Die Rechnung wurde sehr vereinfacht ohne Berücksichtigung der Krümmung und der verschiedenen mittleren Radien von Rohr und Klemme durchgeführt, was aber zu dieser Abschätzung völlig ausreicht. Einer Verfeinerung der Rechnung steht nichts im Wege.

Ausblick.

Obige Rechnung hat gezeigt, wie eine ideale gleichmäßige Umschließung und Pressung eines Rohres durch eine Schelle erreicht werden kann. Zu den an Bild 7 erläuterten Schwierigkeiten wegen der Enge des günstigen Bereiches, treten in der Praxis die Lasteinleitungsprobleme. Die Kräfte können dem geschlitzten Ring nicht in der idealen, der Berechnung zugrunde gelegten Weise am Schlitz zugeleitet werden. Um die Beanspruchung praktischer Ausführungen sichtbar zu machen, steht uns als anschauliches Hilfsmittel die Spannungsoptik[3]) zur Verfügung. Bild 8 zeigt eine solche spannungsoptische Aufnahme. Jeder schwarzen Linie (Isochromate) entspricht eine durch Eichung eindeutig bekannte Beanspruchung. Das Bild zeigt dem Spannungsoptiker auch deutlich die Biegespannungen im Rohr bei ungünstiger Gestaltung der Klemmschelle. In Zusammenarbeit von Theorie und Spannungsoptik können alle derartigen Probleme in vollendeter Klarheit erfaßt und bearbeitet werden.

München. G. Sonntag.

[3]) s. z. B. L. Föppl und E. Mönch, „Praktische Spannungsoptik" Springer Berlin 1950.

Über zwei Näherungskonstruktionen zur Mercatorkarte [1]).

Durch P. Diercke [2]) wurde 1929 eine Näherungskonstruktion für die Mercatorkarte veröffentlicht. In der folgenden Betrachtung sollen zunächst diese Konstruktionen näher untersucht und günstigere Konstanten angegeben werden. Dann soll eine weitere, ebenso einfache Konstruktion, die noch geringere Abweichungen zeigt, dargelegt werden.

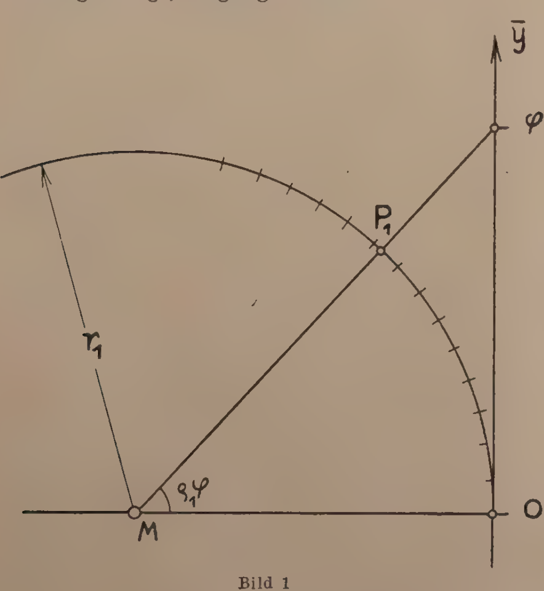


Bild 1

1. Für einen Punkt der Kugel vom Radius $r = 1$ mit den geographischen Koordinaten λ (geogr. Länge) und φ (geogr. Breite), beide im Bogenmaß gemessen, gelten für die Mercatorkarte die Abbildungsgleichungen:

$$x = \lambda, \qquad y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad . \; . \; (1).$$

Diercke gibt folgendes Näherungsverfahren an zur Konstruktion der y-Leiter (Bild 1): Ein Kreis vom Radius r_1 berührt im Nullpunkt die y-Leiter und die Punkte P_1 (Bezifferung φ) der gleichmäßig geteilten Kreisskala mit dem Zentriwinkel $\sphericalangle\, OMP_1 = \varrho_1\varphi$ gegen den Anfangsstrahl werden vom Kreismittelpunkt aus auf die y-Leiter projiziert. Dies bedeutet, daß man die in (1) aufgestellte Funktion y durch die Näherungsfunktion

$$\bar{y} = r_1 \operatorname{tg} \varrho_1 \varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

ersetzt. r_1 und ϱ_1 sind also so zu bestimmen, daß die einzelnen Abweichungen $\varepsilon(\varphi_i) = y(\varphi_i) - \bar{y}(\varphi_i)$ möglichst gering werden. Diercke wählt $\varrho_1 = 0{,}75$ und gibt — ohne nähere Begründung — als günstigsten Wert für r_1 an:

$r_1 = \text{arc}\ 76° = 1{,}32\,645$ bzw. $r_1 = \text{arc}\ 75{,}5° = 1{,}31\,772$, wobei der erste Wert in den Breiten 0—35° und 70—75° und der zweite Wert für die Breiten 40—65° sich am besten anpaßt.

In der am Schluß angegebenen Tabelle sind zum Vergleich angegeben worden: die exakten Werte (Spalte 2), die Näherungswerte $\bar{y}$ (Spalte 3, 5, 7, 9) und die Einzelabweichungen $\varepsilon(\varphi_i)$ für φ_i von 0—70° in Abständen von 5° (Spalte 4, 6, 8, 10). Zur Beurteilung des Maßes der Annäherung sind angegeben:

a) die Summe der Einzelabweichungen $\sum_1^n \varepsilon(\varphi_i)$,

b) die Summe der Quadrate der Einzelabweichungen $\sum_1^n \varepsilon^2(\varphi_i)$ und c) der mittleren Fehler $m = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon^2(\varphi_i)}$, wobei n die Zahl der Funktionswerte ist (hier $n = 15$). Die Annäherung ist also um so besser, je näher die Summe bei a) der Null ist und zugleich die Summe

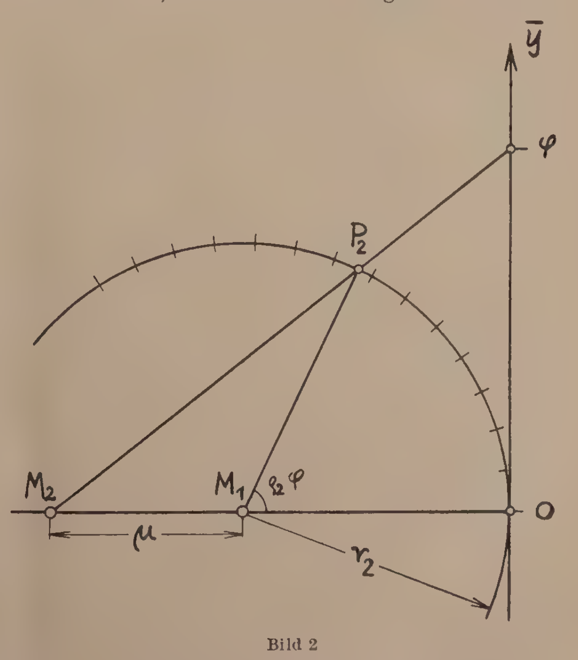


Bild 2

bei b) einem Minimum zustrebt, d. h. je kleiner der mittlere Fehler ist.

Von Diercke wird nicht angegeben, wie er die Zahlwerte seiner Konstanten erhalten hat. Man kann nun diese Konstanten auf verschiedene Weise verbessern. Hält man zunächst einmal den Winkelfaktor ϱ_1 fest, so kann man nach der Methode der

[1]) Aus dem Institut für Angewandte Mathematik der Technischen Hochschule Braunschweig.

[2]) P. Diercke: Die graphische Konstruktion der Mercatorkarte. Ann. Hydrographie 57 (1929), S. 61—66.

kleinsten Quadrate den günstigsten Wert von r_1 ermitteln, indem man fordert, daß

$$\Phi\left(\varepsilon^2(\varphi)\right) = \int_0^{\varphi^*} \left(y(\varphi) - \bar{y}(\varphi)\right)^2 d\varphi$$

zum Minimum wird. Man findet durch Auswertung der entsprechenden Integrale den neuen Wert:

$$r_1 = 1{,}3211 \text{ (Funktionswerte s. Tab. Sp. 5).}$$

Tabelle

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		Werte von P. Diercke		Ausgeglichene Werte		Bessere Anpassung		Zweites Verfahren	
$\varphi°$	y (exakte Werte)	$\bar{y}$ $r_1 = \text{arc } 76°$ $\varrho_1 = 0{,}75$	$10^4\,\varepsilon(\varphi)$	$\bar{y}$ $r_1 = 1{,}3211$ $\varrho_1 = 0{,}75$	$10^4\,\varepsilon(\varphi)$	$\bar{y}$ $r_1 = 1{,}3048$ $\varrho_1 = 0{,}7559$	$10^4\,\varepsilon(\varphi)$	$\bar{y}$ $r_2 = 0{,}79\,203$ $\varrho_2 = 1{,}25$ $\mu = 0{,}60\,029$	$10^4\,\varepsilon(\varphi)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0,0874	0,0869	5	0,0866	8	0,0862	12	0,0865	9
10	0,1754	0,1746	8	0,1739	15	0,1733	21	0,1738	16
15	0,2648	0,2638	10	0,2628	20	0,2616	32	0,2625	23
20	0,3564	0,3554	10	0,3540	24	0,3525	39	0,3536	28
25	0,4509	0,4503	6	0,4484	25	0,4467	42	0,4478	31
30	0,5493	0,5494	− 1	0,5472	21	0,5452	41	0,5464	29
35	0,6528	0,6541	−13	0,6515	13	0,6493	35	0,6504	24
40	0,7629	0,7658	−29	0,7627	2	0,7605	24	0,7615	14
45	0,8814	0,8863	−49	0,8827	−13	0,8806	8	0,8814	0
50	1,0107	1,0178	−71	1,0137	−30	1,0119	−12	1,0126	−19
55	1,1542	1,1633	−91	1,1586	−44	1,1574	−32	1,1583	−41
60	1,3170	1,3265	−95	1,3211	−41	1,3210	−40	1,3226	−56
65	1,5065	1,5125	−60	1,5064	+ 1	1,5055	+10	1,5122	−57
70	1,7354	1,7287	+67	1,7217	137	1,7261	93	1,7354	0
$10^4 \sum_1^n \varepsilon(\varphi_i)$			−303		135		273		1
$10^8 \sum_1^n \varepsilon^2(\varphi_i)$			34173		25960		19772		12651
m			0,0048		0,0042		0,0036		0,0029

Eine weitere Verbesserung erhält man, wenn man die Näherungsfunktion $\bar{y}$ so bestimmt, daß sie außer im Ursprung auch noch für die zwei Argumente φ_1 und $\varphi_2 = 2\,\varphi_1$ mit y übereinstimmt. Man erhält für $\varphi_1 = 35°$:

$$r_1 = 1{,}3118 \text{ und } \varrho_1 = 0{,}7559.$$

Unter Festhaltung von ϱ_1 wird nun wie vorher noch r_1 durch Ausgleichung verbessert, man erhält:

$$r_1 = 1{,}3048 \text{ (Funktionswerte s. Tab. Sp. 7).}$$

2. Eine Abänderung und Verbesserung des Verfahrens von Diercke ergibt sich dadurch, daß man ebenfalls wieder von einem Kreis mit dem Radius r_2 ausgeht, der die y-Leiter im Ursprung berührt (Bild 2), aber jetzt die Punkte der gleichmäßig geteilten Kreisskala mit dem Zentriwinkel $\sphericalangle\, OM_1P = \varrho_2\varphi$ von dem neuen Zentrum M_2 aus projiziert, das auf dem Anfangsstrahl um μ nach links verschoben ist. Die neue Näherungsfunktion lautet daher:

$$\bar{y} = \frac{K_1 \sin \varrho_2\varphi}{\cos \varrho_2\varphi + K_2} \quad \ldots\ldots (3),$$

wobei

$$K_1 = r_2 + \mu, \qquad K_2 = \frac{\mu}{r_2} \quad \ldots\ldots (3^*)$$

ist.

Von dieser Konstruktion kann man größere Anpassungsfähigkeit erwarten, da sie einen Parameter mehr enthält. Bei festem Wert ϱ_2 kann man K_1 und K_2 leicht dadurch bestimmen, daß man außer für $\varphi = 0$ noch für zwei weitere Werte φ_1 und φ_2 die Übereinstimmung mit den exakten Funktionswerten vorschreibt. Durch Variieren der Größen unter Beachtung, daß m möglichst klein wird, kann man dem günstigsten Fall nahe kommen. Es zeigt sich, daß das Minimum ziemlich flach ist, d. h. kleine Änderungen von ϱ_2 haben nur einen sehr geringen Einfluß auf die Funktionswerte. Man ermittelt:

$$\varrho_2 = 1{,}25, \quad r_2 = 0{,}79\,203, \quad \mu = 0{,}60\,029$$

(Funktionswerte s. Tab. Sp. 9). Für diese 15 Funktionswerte ist die Quadratsumme der Abweichungen nur etwa $^1/_3$ so groß wie bei den von Diercke angegebenen Werten. Bei einer Atlantenkarte (Äquatormaßstab 1: 90 000 000) sind die Abweichungen im Bereich bis zu 70° höchstens 0,4 mm. Damit ist wohl gezeigt, daß für viele Zwecke diese leicht zu konstruierende Näherung durchaus brauchbare Resultate liefert.

Braunschweig. Rudolf Ludwig.

Zum Schmiegungsverfahren der konformen Abbildung.

Zur näherungsweisen, umkehrbar eindeutigen und konformen Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche auf den Einheitskreis mit Hilfe sogenannter Schmiegungsfunktionen sind verschiedene Methoden bekannt. Bei der praktischen Durchführung einer Abbildungsaufgabe wird man bestrebt sein, mit besonders zweckmäßigen, dem jeweils vorliegenden Bereich angepaßten Verfahren zu arbeiten, die rasch zum Ziele führen und eine bequeme rechnerische und graphische Behandlung erlauben.

Das von P. Koebe angegebene Verfahren [1]) hat mehr theoretische Bedeutung, praktischen Anforderungen genügen diejenigen von Ringleb [2]) und J. Heinhold [3]).

[1]) P. Koebe: Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung I. J. reine angew. Math. 145 (1915), S. 177—195.
[2]) Ringleb: Numerische und graphische Verfahren der konformen Abbildung. Habilitationsschrift. Heidelberg 1939.
[3]) J. Heinhold: Ein Schmiegungsverfahren der konformen Abbildung., Sitzungsberichte Bayer. Akad. Wiss. Math.-nat. Kl. 1948, S. 203—222.

Diese machen von der Tatsache Gebrauch, daß eine Funktion $w = f(z)$, die einen im Innern des Einheitskreises liegenden Bereich $\mathfrak{B}$ umkehrbar eindeutig und konform auf das ganze Innere des Einheitskreises abbildet, den Punkt Null in sich überführt und nicht nur eine Drehung vermittelt, eine Schmiegeungsfunktion ist, denn ihre Umkehrfunktion $z = \varphi(w)$ ist im Innern des Einheitskreises regulär, für $|w| < 1$ ist $|z| < 1$ und $\varphi(0) = 0$, also sind die Forderungen des Lemmas von H. A. Schwarz erfüllt und $|w| > |z|$. Dies weist auf die Möglichkeit der Konstruktion weiterer Schmiegungsfunktionen hin, wobei man noch die Erfordernisse der Praxis berücksichtigen muß.

Ringleb benützt als Bereich $\mathfrak{B}$ ein Kreisbogenzweieck, J. Heinhold das durch einen senkrecht vom Einheitskreis abstehenden Geraden- oder Kreisstachel aufgeschlitzte Innere des Einheitskreises.

Ein weiteres, in vielen praktischen Fällen brauchbares Verfahren erhält man, wenn man für $\mathfrak{B}$ das durch elementare Funktionen abbildbare Innere eines speziellen Kreisbogendreiecks wählt, bestehend aus einem Teil des Einheitskreises und zwei dazu orthogonalen Kreisbogen, die im Punkte a $(0 < |a| < 1)$ den Winkel $\alpha\pi$ $(0 < \alpha \leq 2)$ bilden mögen (Bild 1).

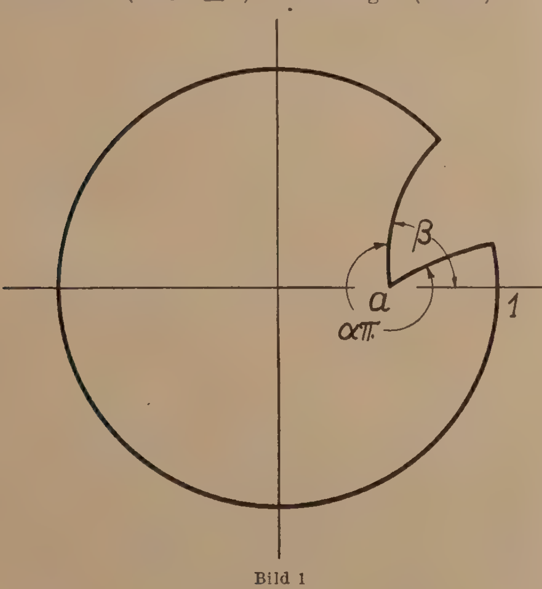


Bild 1

Man kann zur Vereinfachung a reell annehmen. Mit β sei der größere der Schnittwinkel der Kreisbogen mit der positiven reellen Achse (im mathematisch positiven Sinne gezählt) bezeichnet. Geht man schrittweise etwa auf Kreissektor, Halbkreis, Viertelebene, Halbebene und schließlich Einheitskreis über, so findet man für die Abbildungsfunktion die Form

$$w = e^{i\tau} \cdot \frac{Z - Z_0}{Z - \overline{Z}_0}$$

mit

$$Z = \left[\frac{1 + \left(e^{-i\beta} \cdot \dfrac{a - z}{az - 1}\right)^{1/\alpha}}{1 - \left(e^{-i\beta} \dfrac{a - z}{az - 1}\right)^{1/\alpha}} \right]^2,$$

$$Z_0 = \left[\frac{1 + (-ae^{-i\beta})^{1/\alpha}}{1 - (-ae^{-i\beta})^{1/\alpha}} \right]^2,$$

von der man einen entsprechenden, eindeutigen Zweig zu wählen hat. Die reelle Zahl τ kann noch so bestimmt werden, daß $\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=0} > 0$ ist, das positive Linienelement also erhalten bleibt. Sie ist Schmiegungsfunktion, da ihre Umkehrung den Forderungen des Schwarzschen Lemmas genügt.

Ist $\mathfrak{b}$ also ein schlichter, einfach zusammenhängender Bereich, dessen Innenpunkte auch Innenpunkte des Kreisbogendreiecks $\mathfrak{B}$ sind, so wird bei Ausübung der angegebenen Operation $\mathfrak{b}$ dem Einheitskreise angenähert. Für $\alpha = 2$ ergibt sich das Verfahren von J. Heinhold, für $\alpha = 1$ eine spezielle Abbildung nach Ringleb.

Zur praktischen Durchführung ist die Kenntnis der Abbildungsfunktion nicht erforderlich. Man geht dabei am besten schrittweise vor und benützt die Tatsache, daß das angegebene Kreisbogendreieck aus Bogen von Kreisen besteht, die einem elliptischen und hyperbolischen Büschel angehören. Man gibt den Büschelgrundpunkten P_1 und P_2 die kartesischen

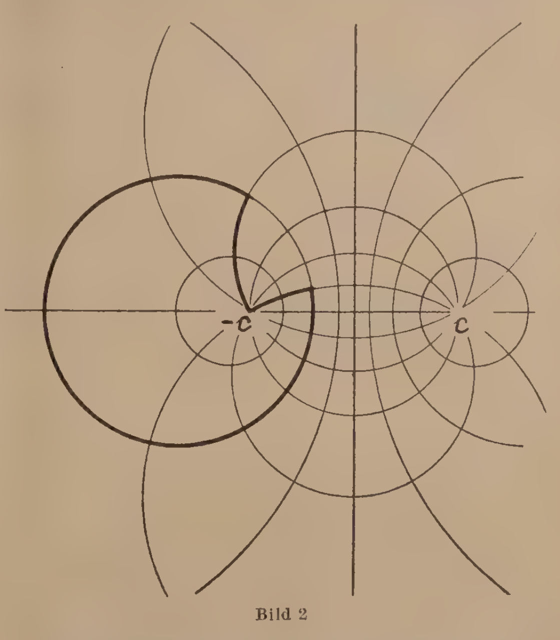


Bild 2

Koordinaten P_1 $(+c;\ 0)$, P_2 $(-c;\ 0)$ (Bild 2) und erkennt, daß sich die Funktion $z_1 = f(z)$, die den ersten Teil der Aufgabe, die Abbildung des Kreisbogendreiecks auf ein rechtwinkliges Kreisbogenzweieck, löst, in der Form

$$\frac{c + z_1}{c - z_1} = k_1 \left(\frac{c + z}{c - z}\right)^{1/\alpha}$$

schreiben läßt. Die Büschelgrundpunkte sind Fixpunkte der Abbildung. k_1 ist dabei eine Konstante, die man so wählt, daß Lage und Größe des ursprünglichen Kreises mit Einheitsradius, der ein Kreis des hyperbolischen Büschels ist, erhalten bleiben. Bei der Behandlung der Aufgabe mit einem Netz solcher Büschelkreise ist es nicht nötig, in die durch die auftretenden linearen Transformationen vermittelten Ebenen überzugehen. Man beziffert die Büschelkreise im Sinne von Polarkoordinaten r, φ (Kreise des hyperbolischen Büschels sind Träger konstanter r-Werte, Kreise des elliptischen Büschels Träger konstanter φ-Werte) und kann dann beliebige Potenzabbildungen im so erhaltenen Koordinatennetz ausführen.

Bei der Lösung des zweiten Teils der Aufgabe, Abbildung des rechtwinkligen Kreisbogenzweiecks auf den Kreis, bedient man sich wiederum des genannten Kreisnetzes und bringt durch einfache Koordinaten- und Ähnlichkeitstransformation die Eckpunkte des Zweiecks nach $(c;\ 0)$ und $(-c;\ 0)$ einer z_2-Ebene. Die Kreisbogen des Zweiecks gehören nun Kreisen des elliptischen Büschels an (Bild 3). Die Funktion $z_3 = g(z_2)$, die das rechtwinklige Kreisbogenzweieck

auf den Kreis abbildet, läßt sich wiederum in der Form

$$\frac{c+z_3}{c-z_3} = k_2 \left(\frac{c+z_2}{c-z_2}\right)^2$$

schreiben. Fügt man noch die zur Erhaltung des positiven Linienelements notwendige lineare Abbildung

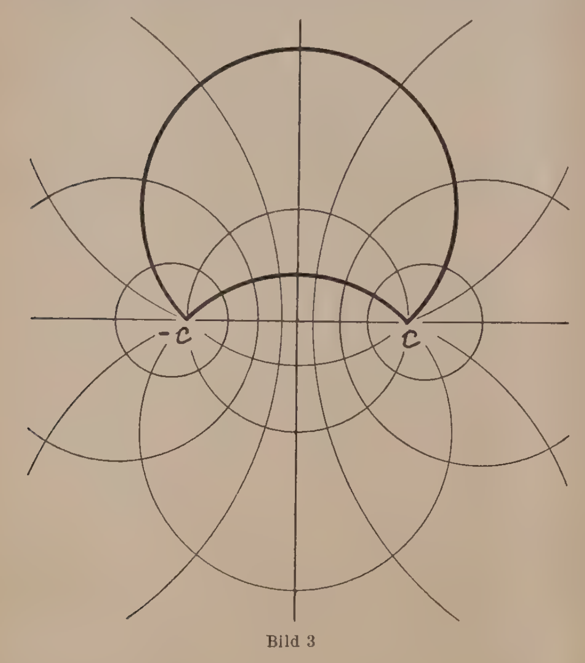


Bild 3

hinzu, so ist die Schmiegungsoperation einmal aus geführt.

Man hat nun die für die Praxis bemerkenswerten Tatsachen, daß man hier behandelte sowie die anfangs erwähnten, aber auch weitere Schmiegungsoperationen graphisch mit einem einzigen Netz von Kreisen ausführen kann, wenn man noch Ähnlichkeitstransformationen zuläßt, und daß der numerischen Behandlung im wesentlichen eine einzige, einheitliche Darstellung

$$\frac{c+w}{c-w} = k \left(\frac{c+z}{c-z}\right)^{\nu} \qquad (\nu \text{ reell})$$

zugrundegelegt werden kann, die nach geeigneten Substitutionen $\left(\text{etwa: } \frac{c+w}{c-w} = e^{U+iV};\ k = e^{\sigma+i\tau};\ \frac{c+z}{c-z} = e^{X+iY}, \text{ was } \frac{z}{c} = \mathfrak{Tg}\left(\frac{X}{2}+i\,\frac{Y}{2}\right),\ \frac{w}{c} = \mathfrak{Tg}\left(\frac{U}{2}+i\,\frac{V}{2}\right) \text{ ergibt}\right)$ rechnerisch leicht zu erfassen ist.

Wie bei anderen Schmiegungsverfahren kann auch hier von Symmetrieeigenschaften abzubildender Bereiche weitestgehend Gebrauch gemacht werden.

Die zur Erhaltung des positiven Linienelements erforderliche lineare Abbildung kann auch erst nach mehreren erfolgten Kreisbogendreiecksabbildungen angefügt werden.

Das angegebene Verfahren läßt sich analog für das Äußere des Einheitskreises durchführen.

München. Rudolf Albrecht.

BUCHBESPRECHUNGEN

L. Heffter (em. o. Prof. a. d. Univ. Freiburg-Br.), Beglückte Rückschau auf neun Jahrzehnte. 191 S. Freiburg (Br.) 1952. Hans Ferdinand Schulz Verlag. Kart. 9,— DM.

Der Verf., der am 11. Juni 1952 das neunzigste Lebensjahr vollendete, gibt in diesem wohl für seine Bekannten und ehemaligen Schüler geschriebenen Buche einen Rückblick auf sein Leben, ohne näher auf seine wissenschaftliche Arbeit einzugehen. Er habilitierte sich 1888 in Gießen und war dann in Bonn, Aachen, Kiel und zuletzt in Freiburg tätig. Den Leser dieser Zeitschrift wird besonders interessieren, was er von den damaligen Verhältnissen an diesen Hochschulen und von den Mathematikern seines umfangreichen Bekanntenkreises erzählt.

Dresden. Willers.

Arthur Pröll (Prof. i. R. a. d. Techn. Hochschule Hannover), Grundlagen der Aeromechanik und Flugmechanik. XVI u. 612 S. mit 278 Abb. Wien 1951. Springer-Verlag. Preis geb. 48,— DM.

Der Verfasser hatte sich schon nach dem ersten Weltkrieg das Verdienst erworben, eine erste größere zusammenfassende lehrhafte Darstellung der aerodynamischen und mechanischen Grundlagen des Fluges in seiner „Flugtechnik" zu liefern. In entsprechender Weise hat er es jetzt unternommen, für Studenten und Ingenieure abermals zu entwickeln und zusammenzustellen, was von dem Alten geblieben, und was in 32 Jahren an Wesentlichem hinzugekommen ist. Wer in diesem Zeitraum mit der gewaltigen Entwicklung auf diesem Gebiet in Berührung gekommen ist, kann ermessen, daß es sich um ein schwieriges und umfangreiches Unternehmen handelt. Nimmt man hinzu, daß außer den theoretischen Grundlagen auch die hauptsächlichen experimentellen Daten und zahlreiche numerische Berechnungsbeispiele gebracht werden, so ist festzustellen, daß in anbetracht der durch den Krieg entstandenen Lücke an einschlägiger Buchliteratur das Buch einen erfreulichen Auftakt für Weiteres bedeutet. Offen bleibt noch der Wunsch nach stärkerer Berücksichtigung der ausländischen Literatur.

Für den Ingenieur der Praxis bildet das Buch ein wertvolles Nachschlagewerk, in dem er fast jede wesentliche Frage beantwortet findet (von Einzelheiten abgesehen, wie etwa Rakete, Näheres über Windkanäle, Überschallkanäle). Dagegen ist es als erste Einführung für den Studenten da und dort nicht ganz leicht zu lesen und bedarf gerade in didaktischer Hinsicht noch einer gewissen Überarbeitung, so z. B. bei der Einführung des „dynamischen Druckes", dessen Identität mit dem „Staudruck" verschleiert bleibt (S. 8, bzw. 11), hinsichtlich der „oberen" kritischen Zahl (S. 213), die seit Reynolds in anderer Bedeutung eingeführt ist, und bei der Reynoldsschen Zahl der Platte, deren kritischer Wert ohne genügenden Hinweis bald auf die Grenzschichtdicke, bald auf die Anlauflänge bezogen wird (S. 234 ff.).

Für den ersten Teil ist zu erwähnen, daß er in den Grundlagen der Strömungslehre nicht lediglich auf die fliegerischen Fragen zugeschnitten ist, und u. a. auch eine Einführung in die Gasdynamik enthält, aus dem zweiten Teil die ausführliche Behandlung der Stabilitätsfragen. Den Hauptvorzug des Buches wird man in der Reichhaltigkeit des Inhalts erblicken dürfen, der die einschlägigen Fragen mehr oder weniger erschöpfend beantwortet.

Weilburg. L. Schiller.

P. Finsler (o. Prof. a. d. Univ. Zürich), Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Unveränderter Nachdruck der Dissertation von 1918. Mit ausführlichem Literaturverzeichnis von H. Schubert. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Math. Reihe Bd. 11) XI + 160 S. Basel 1951. Verlag Birkhäuser. Preis brosch. 12,— Fr., geb. 14,80 Fr.

Diese Dissertation ist seinerzeit in keiner Zeitschrift erschienen und war im Buchhandel nicht zu haben. Da sie in der Folgezeit eine sehr weitreichende Wirkung hatte, ist es sehr zu begrüßen, daß sie der Verlag Birkhäuser neu herausgab und mit einem sehr ausführlichen bis 1949 fortgeführten Literaturverzeichnis versehen ließ. Eine eingehende Besprechnung gab s. Zt. R. Rothe in den Fortschritten der Math. Bd. 46_2 S. 1131.

Verf. definiert das Differential der Bogenlänge noch in Verallgemeinerung des Riemannschen Ansatzes durch eine beliebige Differentialform, die nur homogen vom ersten Grade sein muß. Das Integral gibt Anlaß zu einem Variationsproblem, und dessen Extremalen, also die Linien kürzesten Abstandes, treten an die Stelle der geraden Linien. Bei der Winkelmessung muß in Kauf genommen werden, daß sie i. A. von der Reihenfolge der Schenkel nicht unabhängig ist und daß sich die Winkel zwischen mehreren Richtungen einer Ebene nicht addieren; erst in der Grenze verschwinden diese Abweichungen. Verf. gelingt es nun, die Begriffe und Sätze der euklidischen Kurven- und Flächentheorie auf seine Räume zu übertragen: So gewinnt er eine Folge von Krümmungen und natürlichen Gleichungen für Kurven, die Sätze von Meusnier, die Dupinsche Indikatrix für Flächen. Er bestimmt Krümmung und Torsion der Asymptotenlinien und der geodätischen Linien. Bei den Hauptkrümmungen zeigt es sich, daß das Krümmungsmaß keine Biegungsinvariante ist, sondern von einer „inneren" Krümmung unterschieden werden muß.

Halle. Ott-Heinrich Keller.

L. Bieberbach, Einführung in die Funktionentheorie. 2. Aufl., 220 S. mit 43 Abb. Bielefeld 1952. Verlag für Wissenschaft und Fachbuch. Preis brosch. 12,60 DM.

In der 2. Auflage des Buches hat sich der Verfasser das Ziel einer Einführung in die Funktionentheorie und ihre Anwendungsgebiete gesetzt, die nur bescheidene Vorkenntnisse des Lesers voraussetzt. Es sind deshalb nach Möglichkeit leicht verständliche geometrische Überlegungen herangezogen und solche Dinge erörtert worden, die den Praktiker angehen und so seine wissenschaftliche Anteilnahme wach halten. Dessen ungeachtet gelingt es dem Verfasser auf knappen Raume, eine lückenlose Lehre von den komplexen Funktionen bis zum Riemannschen Abbildungssatze aufzubauen und weiter die Fruchtbarkeit funktionentheoretischer Schlußweisen dem Leser an erläuternden Beispielen aus der Potentialtheorie, der Hydrodynamik sowie aus der Theorie und Praxis der konformen Abbildung vor Augen zu führen.

Sehr zu begrüßen ist Herrn Bieberbachs Bestreben, den schwankenden Gebrauch der sprachlich an sich gleichbedeutenden Namen Bereich und Gebiet durch die Festsetzung zu beseitigen, daß unter einem Bereiche eine offene zusammenhängende Punktmenge verstanden werden soll. Im Hinblick auf Periodenparallelogramme und andere Maschen, die weder offen noch geschlossen sein können, fehlt es an einer Bezeichnung für den Oberbegriff, der alle zusammenhängenden Punktmengen umfaßt. Hierfür scheint mir der Name Gebiet besonders geeignet.

Zu den Darlegungen und Bildern S. 15f möchte ch bemerken, daß das Kurvensystem

$$\ln|z| = mk, \quad \operatorname{arc} z = nk; \quad m, n \equiv 0 (\operatorname{mod} 1)$$

auch der Winkeltreue Rechnung trägt und die Einführung anderer Maschen bei den Bildern 8 nicht benötigt.

Die anregende, fesselnde Darstellung und Reichhaltigkeit verleihen dem Buche einen hohen Rang und sichern ihm einen weiten Leserkreis.

Dresden. P. E. Böhmer.

Dr. H. Schlichting (o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Braunschweig), Grenzschicht-Theorie. (Wissenschaftliche Bücherei.) XV + 483 S. mit 295 Abb. und 32 Tabellen. Karlsruhe 1951. G. Braun. Preis kart. 42,80 DM, geb. 45,— DM.

Der Verf., der selbst maßgebend an der Entwicklung der von L. Prandtl geschaffenen Grenzschicht-Theorie beteiligt ist, hat dieses Buch in erster Linie für den Ingenieur bestimmt, der sich für die Lösung praktischer Probleme die notwendigen Kenntnisse aneignen will. Damit wird eine in Anbetracht der großen Bedeutung der Grenzschicht-Theorie empfindliche Lücke in den Veröffentlichungen auf diesem Gebiet geschlossen, da die letzten zusammenfassenden Darstellungen Anfang der dreißiger Jahre erschienen sind. Das Buch vereinigt in sich in besonders gelungener Weise den Charakter eines Lehrbuchs und eines Handbuchs, so daß es auch für den Forscher von unschätzbarem Nutzen ist. Die in den letzten Jahrzehnten erzielten bedeutenden Fortschritte auf dem Gebiet der Grenzschichtforschung, die in unzähligen, z. T. schwer zugänglichen Einzelveröffentlichungen ihren Niederschlag gefunden haben — vom Verf. werden über 500 Arbeiten zitiert — sind hier systematisch von den Grundlagen an bis zu den neuesten, z. T. abschließenden Ergebnissen zusammengefaßt. Die Ergebnisse der zitierten Arbeiten sind dabei entweder direkt verarbeitet oder deren wichtigste Punkte stichwortartig angegeben.

Nach einer einführenden Betrachtung über das Wesen der Grenzschicht-Theorie beginnt der Verf. mit der allgemeinen Theorie der Strömung einer zähen Flüssigkeit. Die anschließende Behandlung der laminaren Grenzschicht erstreckt sich auch auf die Temperaturgrenzschicht (Wärmeübergang) und die Grenzschicht in kompressibler Strömung, wobei neben den exakten Lösungen auch die verschiedenen Näherungsverfahren beschrieben werden. Der dritte Teil bringt den Umschlag laminar-turbulent (Entstehung der Turbulenz), also im wesentlichen die Untersuchungen der Stabilität der laminaren Grenzschichtströmung. Im letzten Teil werden die turbulenten Grenzschichten mit den entsprechenden Rauhigkeitsgesetzen behandelt. Ein Kapitel ist dabei auch der freien Turbulenz (Strahlausbreitung u. ä.) gewidmet und ein weiteres der Ermittlung des Profilwiderstandes sowie der Strömungsverluste bei Schaufelgittern.

Die Veröffentlichung dieses hervorragenden Werkes von einem der hierzu berufensten Verfasser wird in allen interessierten Kreisen lebhaft begrüßt werden.

Berlin. Krienes.

Dipl.-Ing. Dr. techn. F. Söchting (a. o. Prof. a. d. TH Wien), Berechnung mechanischer Schwingungen; 325 S. m. 140 Abb. Wien 1951. Springer-Verlag. Preis geb. 32,70 DM.

Das Buch ist entstanden aus Vorlesungen des Verf. an der Technischen Hochschule Wien; es beabsichtigt, Einblick in Probleme zu vermitteln, die insbesondere bei technischen Untersuchungen auftreten. Dennoch ist der theoretische Teil hierbei nicht zu kurz gekommen; u. a. wird auch auf das Rechnen mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen hingewiesen. Die Einzelabschnitte sind folgende: Grundlagen, Schwingungen des Einmassensystemes, Schwingungen des Mehrmassensystems und Koppelschwingungen, Schwingungen elastischer Körper (Saiten, Stäbe, Membrane, Platten, Scheiben Flüssigkeiten und Gase), Schwin-

gungen mechanischer Systeme (Pulsator, Riementrieb. Kran, Kolbenmaschinen, Schwungräder, Turbinenschaufeln, Turbinenlaufräder, Propeller, Fachwerke, Schiffe), Tabellen, Namen- und Sachverzeichnis. Der besonders umfangreiche Abschnitt über Schwingungen mechanischer Systeme bietet zugleich eine kritische Übersicht über die in der modernen Schwingungstechnik gebräuchlichen Verfahren. Das Buch zeichnet sich ferner durch eine weitgehende Durcharbeitung der einschlägigen deutschen und österreichischen Literatur aus und läßt bei vielen Erläuterungen die Erfahrungen des Verf. auf dem Gebiete der praktischen Schwingungstechnik erkennen. Gerade in dieser Hinsicht erscheint das Buch als wichtige Ergänzung des bisherigen Schrifttums.

Dresden. H. Neuber.

F. Lösch u. F. Schoblik, Die Fakultät (Gammafunktion) und verwandte Funktionen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. (Bearbeitet von Dr. F. Lösch, Prof. a. d. Techn. Hochschule Stuttgart.) VI + 205 S. m. 22 Abb. Leipzig 1951. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. 16,80 DM.

Mit dem Buch von Weyrich über Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen hatte der Verlag Teubner begonnen, Bände herauszugeben, die Theorie und Anwendung der im Werk von Jahnke-Emde vertafelten Funktionen behandeln. Mit dem vorliegenden Buch wird diese Reihe fortgesetzt. Es ist der Fakultät und verwandten Funktionen gewidmet. Verf. hat den Stoff in drei Abschnitte gegliedert. deren erster der Γ- und der Ψ-Funktion gewidmet ist; der zweite behandelt die unvollständige Γ-Funktion, und der letzte bringt Anwendungen insbesondere der letzten Funktion. Das Buch verfolgt ähnliche Ziele, wie etwa das von Böhmer über Differenzengleichungen, erhält jedoch seinen besonderen Charakter, der es gerade dem für die Anwendung interessierten Mathematiker besonders wertvoll macht, dadurch, daß überall auf diese Bezug genommen wird. Schon in den ersten beiden Abschnitten ist das der Fall. Hier wird im wesentlichen das gebracht, was in Physik und Technik von Wichtigkeit ist. Im letzten Abschnitt werden dann in 10 Paragraphen, von denen 3 und 5 bis 9 besonders interessant sind, Anwendungen gebracht.

Die Darstellung ist sehr klar und exakt und bringt alles Wichtige und auch manches Neue. Allerdings werden allerlei Kenntnisse der Funktionentheorie vorausgesetzt, so daß das Buch nicht überall leicht zu lesen ist. Als störend empfindet Ref., daß Verf. nicht die, wie er selbst sagt in der Literatur üblichen Bezeichnungen verwendet, sondern wahrscheinlich im Anschluß an die Tafel von Jahnke-Emde die wenigstens in Deutschland kaum gebrauchten Bezeichnungen, die vom britischen commitee on mathematical tables festgesetzt sind. Das beeinträchtigt natürlich den Wert dieses ausgezeichneten Buches, das insbesondere denen empfohlen sei, die die Jahnke-Emdeschen Tafeln benutzen, nicht.

Dresden. Willers.

Dr. phil. Ludwig Föppl (o. Prof. TH. München) und **Dr.-Ing. G. Sonntag** (Priv.-Doz. TH. München), Tafeln und Tabellen zur Festigkeitslehre. 226 S. m. 305 Abb. München 1951. Verlag R. Oldenbourg. Preis geb. 32,— DM.

Der Wert des Buches liegt hauptsächlich in der Zugänglichmachung der weit verstreuten Literatur über neuere Ergebnisse der Festigkeitsforschung. Die jeweils erforderlichen Anwendungsformeln sind in übersichtlicher Weise herausgestellt. Textteil und Abbildungsteil sind buchtechnisch voneinander getrennt angeordnet und können nebeneinander aufgeschlagen werden. Die Hauptabschnitte sind: Ungestörte Spannungszustände (Biegung des geraden und gekrümmten Stabes, Torsionsprobleme, ebene Spannungszustände, räumliche Spannungszustände, Hertzsche Härte, Fundamente, Platten, Schalen), Kerbspannungen (ebene Kerbwirkung bei Scheiben, ebene Kerbwirkung bei Platten, räumliche Kerbwirkung bei Umdrehungskörpern, prismatische Kerbwirkung, Übersicht über die Lösungen von Neuber, technische Sonderfälle), Stabilitätsprobleme (Stäbe, Wellen, Platten, Scheiben, Schalen), Verschiedenes (Gültigkeitsbereich der Elastizitätstheorie, Querschnittsgröße, Querschnittsform und Einspannwirkung bei Dauerfestigkeit, Wärmespannungen in einem dünnwandigen Rohr, Biegestoß gegen Balken und Platte). Die auf engem Raum gebotene Vielseitigkeit des Inhaltes wird dem Buche bei weiten Kreisen großen Anklang sichern.

Dresden. H. Neuber.

K. Federhofer (o. Prof. a. d. TH. Graz), Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers. II. Teil: Kinematik und Kinetik des Punktes. 113 Aufgaben nebst Lösungen. 103 S. mit 105 Abb. — III. Teil: Kinematik und Kinetik starrer Systeme. 149 Aufgaben nebst Lösungen. 139 S. mit 191 Abb. Wien 1951. Springer-Verlag. Preis je 9,60 DM.

Der I. Teil dieser Aufgaben-Sammlung (Statik) wurde in dieser Zeitschrift bereits besprochen (vgl. Bd. 31 [1951], S. 226). Der nunmehr vorliegende II. und III. Teil behandelt die Bewegungsvorgänge des Massenpunktes und des starren Körpers, wobei sich der II. Teil in folgende Teilgebiete gliedert: Geradlinige Bewegung, krummlinige Bewegung, Wurfbewegung, Zentralbewegung, Schwingungen, geführte Bewegung, Relativbewegung. Die Kenntnis der Elemente der Differential- und Integralrechnung wird bei der Lösung der meisten Aufgaben vorausgesetzt. Bei Besprechung der Lösungen macht Verf. verschiedentlich auch von der Vektorrechnung Gebrauch. Die Darstellung des Lösungsganges ist jedoch im allgemeinen ausführlich genug, so daß auch der weniger mathematisch geschulte Leser das Buch ohne Schwierigkeiten durcharbeiten kann. Bei Behandlung der Zentralbewegung erwähnt Verf. u. a. interessante, offenbar neue Eigenschaften der Sinusspiralen. Der III. Teil gliedert sich in folgende Teilgebiete: Kinematik der ebenen Systembewegung (freies System, zwangsläufiges System), Kinematik des räumlichen Systems, Kinetik starrer Systeme (Drehung um eine feste Achse, Drehung um einen festen Punkt, ebene Bewegung, Kinetostatik, kleine Schwingungen, Bewegung mit veränderlichen Massen, Stoß und plötzliche Fixierungen). Hierbei ist die ausführliche Besprechung einiger Aufgaben bemerkenswert, z. B. bei Bewegung von Systemen mit veränderlichen Massen (Raketenproblem). Interessant ist ferner die vorteilhafte Benutzung des Major-v. Misesschen Abbildungsverfahrens bei räumlichen Aufgaben. Die Klarheit der Darstellung und die Vielseitigkeit des Inhaltes versprechen für die beiden neuen Teilbände großen Anklang.

Dresden. H. Neuber.

Dr. phil. F. A. Fischer (wissensch. Mitarbeiter im fernmeldetechn. Zentralamt, Darmstadt), Grundzüge der Elektroakustik. (Frequenz-Bücherei.) 162 S. m. 102 Abb. u. 5 Tabellen. Berlin 1950. Fachverlag Schiele & Schön. Preis geb. 19,— DM.

Der Verfasser arbeitet schon seit mehreren Jahrzehnten an einer systematischen Ordnung der Schallwandler und der Gewinnung einheitlicher Grundlagen für die mathematische Formulierung der hier vorliegenden Gesetze. In dem obengenannten Buch legt er nunmehr eine sehr übersichtliche Zusammenfassung

dieses Aufgabengebietes vor. Der Titel sollte allerdings etwa „Die theoretischen Grundlagen der Schallwandler" heißen, denn nur das Spezialproblem der Schallwandlung über mechanische Schwingungsgebilde wird behandelt. Dieses nicht einfache Problem wird aber dafür mit strenger Konsequenz, sehr umfassend und in so übersichtlicher Form dargestellt, daß der Fachmann, der sich nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ mit elektroakustischen Fragen befaßt, in diesem Buch eine sichere Anleitung finden wird. Eine klare Einteilung der Schallwandler in 4 Klassen erleichtert das Ansetzen der richtigen Differentialgleichungen und ihre Ausdeutung in elektrischen Ersatzschaltbildern. Der Übergang von den elektrischen zu den mechanischen und von diesen wieder zu den akustischen Denkschemata wird durch systematische Gegenüberstellung und Hervorheben der gemeinsamen Regeln erleichtert. Wege zur Berechnung des Wirkungsgrades, der Empfindlichkeit und der Gestaltung von Breitbandwandlern werden aufgezeigt. Wegen seiner breiten Grundlage wird das Buch nicht nur den Akustiker interessieren, sondern alle Mathematiker und Physiker, die sich mit dem interessanten Wechselspiel zwischen elektrischen und mechanischen Schwingungen beschäftigen.

Dresden. Reichardt.

Jeffry, R. L., The Theory of Functions of a Real Variable. (Mathematical Expositions No. 6) XIII u. 232 S. Toronto 1951. University of Toronto Preß. Gzln. $ 6,00.

Dem Herausgeberstab und den einzelnen Autoren der Mathematical Expositions ist es ein wahrhaft ernstes Anliegen, in ihrer Schriftenreihe nur pädagogisch gut aufgebaute, inhaltlich zuverlässige und dem Verständnis der Studierenden angepaßte Lehrbücher erscheinen zu lassen. Damit soll versucht werden, eine in den letzten Jahren im englischen Schrifttum fühlbar gewordene Lücke zu schließen oder zumindest dort einer weiteren rückläufigen Entwicklung in der Lehrbuchliteratur entgegenzuwirken. Soweit Ref. einzelne Bände dieser Sammlung eingesehen hat, glaubt er sagen zu können, daß hier Lehrbücher vorliegen, die in unserem Lande ebenfalls Beachtung verdienen und die geeignet sein dürften, auch unsere Studierenden anzusprechen.

Der hier zur Rezension stehende Band ist der Theorie der reellen Funktionen gewidmet. Sein Inhalt entspricht etwa dem Lehrstoff einer einsemestrigen drei- bis vierstündigen Vorlesung, die sich an mittlere Semester wendet, führt also nicht bis in die gegenwärtige Forschung heran, sondern bevorzugt Grundlegendes und ist folgendermaßen gegliedert: Einleitung (17 S., kurzes Resumé über den Aufbau der reellen Zahlen nach Dedekind), Mengen, Folgen und Funktionen (25 S., Schranken, Grenzwerte, gleichmäßige Konvergenz), Metrische Eigenschaften von Mengen (21 S., allgemeine Definitionen, Begriff der Meßbarkeit und des Maßes, maßtreue Transformationen, nichtmeßbare Mengen), Lebesguesches Integral (15 S., meßbare Funktionen, Definitionen des Lebesgueschen und Riemannschen Integrals), Eigenschaften des Lebesgueschen Integrals (29 S., Bezeichnungen und elementare Eigenschaften, Summierbarkeit, Erweiterung auf nichtbeschränkte Mengen, Integrabilität von Folgen, Integrale mit Parameter, Ergodensatz), Metrische Dichten und Funktionen von beschränkter Variation (30 S., Vitalischer Überdeckungssatz, obere und untere Ableitung, Mengenfunktionen), Inversion der Ableitung (25 S., Stammfunktion, das allgemeine Integrationsproblem, Integral von Denjoy und Verallgemeinerungen), Fortsetzung (39 S., Approximationen, Beziehungen zwischen beliebigen und meßbaren Funktionen), Stieltjes-Integral (15 S., Definition und elementare Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals, lineare Funktionale). Am Ende eines jeden Kapitels sind zahlreiche Übungsaufgaben und am Schlusse des Buches 70 bibliographische Angaben angefügt.

Daß im vorliegenden Aufbau einer rein mathematischen Disziplin die Anwendungen beiseite gelassen wurden, ist selbstverständlich. Das Buch bietet aber sehr viele Hilfsmittel, auf die der angew. Mathematiker in der Theorie der Fourierschen Reihen, in der Potentialtheorie, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Statistik und in der Mechanik heutzutage nicht mehr verzichten kann.

Freiburg i. Br. H. Bilharz.

Physikalische Verhandlungen. Referatenorgan für das gesamte Gebiet der Physik und der angrenzenden Wissenschaften. Zwanglose Lieferungen kurzfristig nach den Tagungen. Mosbach/Baden. Physik-Verlag. Preis jährlich 10,— DM.

Die bisher als Beilage zu den „Physikalische Blättern" erscheinenden „Physikalischen Verhandlungen" werden künftig als selbständige Zeitschrift herauskommen. Sie wollen Autorreferate der auf den Tagungen folgender Gesellschaften gehaltenen Vorträge möglichst bald nach den Tagungen bringen:

„Verband Deutscher Physikalischer Gesellschaften mit den angeschlossenen fünf Physikalischen Gesellschaften, Astronomische Gesellschaft, Deutsche Geophysikalische Gesellschaft, Deutsche Gesellschaft für angewandte Optik, Deutsche Gesellschaft für Elektronenmikroskopie, Deutsche Mineralogische Gesellschaft. Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik, Meteorologische Gesellschaft, Österreichische Physikalische Gesellschaft."

Ausführlichere Berichte über die auf der Tagung der GaMM gehaltenen Vorträge werden nach wie vor in Heft 8/9 jedes Jahrganges der Z. angew. Math. Mech. erscheinen.

Dresden. Willers.

Dr.-Ing. F. Wachendorf, Allgemeine mathematische Berechnungen auf Brunsviga-Doppelrechenmaschinen. Bearbeitet und erweitert von B. Schrader, Braunschweig 1951. Brunsviga-Maschinenwerke AG.

Auf in einer Mappe vereinigten Blättern sind eine Reihe sehr brauchbarer Rechenverfahren angegeben, die die Möglichkeiten der insbesondere für geodätische Rechnungen gebauten Doppelrechenmaschinen ausnutzen, so für die Darstellung von Kegelschnitten, das Rechnen mit komplexen Zahlen, die Lösung quadratischer und kubischer Gleichungen usw. Auffällig ist, daß für die Berechnung von Quadratwurzeln nur auf das doch recht umständliche Töplersche Verfahren verwiesen wird. In den Blättern über Vektorrechnung, die sich in der Hauptsache nur mit der Algebra von Vektoren in der x, y-Ebene beschäftigen, finden sich eine Reihe von fehlerhaften Gleichungen wie

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a_x + b_x) + (a_y + b_y)$$

und ähnliche.

Dresden. Willers.

R. Richter (em. Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe), Elektrische Maschinen. Band I: Allgemeine Berechnungsgrundlagen. Die Gleichstrommaschine. 2. verb. Aufl. XVI + 630 S. mit 453 Abb. Basel 1951. Verlag Birkhäuser. Preis geb. 49,40 Fr., brosch. 45,25 Fr.

Auf die Bedeutung des Richterschen Standardwerkes braucht nicht besonders hingewiesen zu werden. Die 2. Auflage dringt wie die 1. aus dem Jahre 1924 mit umfassender Gründlichkeit in das Gebiet ein. Der hohe wissenschaftliche Stand des Richterschen Werkes kann am besten daraus abgelesen wer-

den, daß ein ,,berichtigter photomechanischer Neudruck" genügte, um es dem neuesten Stand der Technik anzupassen.

Das Buch ist sowohl ein unentbehrlicher Berater für den Ingenieur der Praxis, als auch wegen der ausführlichen Einführung in den Elektro-Maschinenbau eine zuverlässige vielseitige Quelle für den Studierenden. Die Neuauflage wird im Sinne des Vorwortes, insbesondere in den durch den Krieg hart mitgenommenen deutschen Büchereien, eine fühlbare Lücke schließen.

Dresden. Obenaus.

Lloyd F. Ryan, Experiments on Aerodynamic Cooling; **M. Degen**, Untersuchungen an einem Gegenlaufpropeller im Windkanal. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, Nr. 18). 65 S. mit 47 Abb. Zürich 1951. Verlag Leemann.

Das vorliegende neue Mitteilungsheft aus dem Institut von Prof. Ackeret in Zürich enthält zwei umfängliche experimentelle Arbeiten, von denen die erste vorwiegend physikalisch-grundsätzliche, die zweite ausgesprochen technische Bedeutung besitzt. Ryan berichtet über Messungen der Oberflächentemperatur wärmeisolierter Körper (Kreiszylinder, andere Zylinder, Halbkörper, NACA 0012 — 1, 1—30, Ellipse) mit eingebetteten Thermoelementen und der Mitteltemperatur des Totwassers in verschiedenen Abständen vom Kreiszylinder. Anliegende Strömung und laminare Grenzschicht lieferte gute Übereinstimmung mit Werten, die mit Hilfe der Theorie der ebenen Platte, ausgehend von der lokalen Temperatur außerhalb der Grenzschicht, gewonnen wurden. Im Ablösungsgebiet ergaben sich durchweg tiefe Temperaturen, wie sie von Eckert und Weise bereits beim Kreiszylinder gemessen wurden. Schlierenaufnahmen zeigten hier stark nichtstationäre Vorgänge, bei bestimmten *Ma* ausgeprägte Wirbelstraßen mit besonders tiefen Temperaturen und starkem Geräusch. Heranziehung der nichtstationären Glieder der Energiegleichung gestattete eine theoretische Erörterung der Temperaturerscheinungen im Ablösungsgebiet.

Die technische Bedeutung des Gegenlaufpropellers liegt besonders darin, daß durch den Wegfall des resultierenden Drehmoments und durch Verminderung der Drallverluste günstigere Start- und Landeeigenschaften zu erwarten sind, sowie Erhöhung des effektiven Schubs bei Start, Schnellflug und Bremsung. Degen berichtet über Messungen an einem Gegenlaufpropeller aus 2×2 Blättern, der 1941 für 1200 bis 2000 PS entworfen wurde. Aufgenommen wurden Drehmoment- und Schubbeiwerte in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad λ, bei gleicher Drehzahl für hintere und vordere Schraube. U. a. werden auch Vergleiche mit einer einfachen Vierblattschraube durchgeführt. Besonders hoch ist der Gewinn des Gegenpropellers am Wirkungsgrad bei hohen Fortschrittsgraden mit den hohen Drallverlusten der Vierblattschraube. Diese und andere Ergebnisse lassen es angezeigt erscheinen, im Hinblick auf große Propellerturbinen die Versuche auch auf große Blattzahlen auszudehnen.

Weilburg (Lahn). L. Schiller.

Hermann Ebert (unter Mitwirkung zahlreicher Fachwissenschaftler), Physikalisches Taschenbuch. 522 S. mit 147 Abb. Braunschweig 1951, Verlag Vieweg & Sohn. Preis 14,80 DM.

Dieses Buch enthält aus allen Gebieten der Physik Definitionen, treffende Erläuterungen, hier und da einen Abriß der Theorie, zahlreiche Formeln, Hinweise für ihre Verwendung und viele Tabellen, Kurven, Schaltbilder, Skizzen auf 500 Seiten Dünndruckpapier. Dadurch erreicht sein Volumen nur die Hälfte eines ,,Hütte"-Bandes.

An Vielseitigkeit übertrifft es den ,,Kohlrausch". Außer den von dort bekannten Kapiteln bringt es ,,Mathematische Hilfsmittel"; ,,Relativitätstheorie, Quantentheorie"; ,,Grundbegriffe der Astrophysik".

Die Menge der mitgeteilten Zahlenwerte reicht natürlich nicht an die des ,,D'Ans-Lax" heran. Trotzdem wird der Physiker in vielen praktischen Fällen mit dem Physikalischen Taschenbuch auskommen, sofern er nicht speziell chemisch interessiert ist.

Die Ausgeglichenheit der Darstellung dieser Gemeinschaftsleistung von 38 Mitarbeitern überrascht und verrät zugleich die reichen Erfahrungen von Bearbeitern des ,,Kohlrausch". —

Vielleicht ließen sich bei einer späteren Neuauflage mehr Literaturhinweise einstreuen, die als Fußnoten in Kleindruck noch gut Platz fänden. — Kurzum — das Buch ist ausgezeichnet. Physiker und Ingenieure — erfahrene und angehende — werden es gern zu ihrem ständigen Begleiter machen. H. Zimmer.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

Dr.-Ing. Karl Kuhlmann (em. Prof. a. d. ETH. Zürich). Theoretische Elektrotechnik, Bd. III. Grundzüge der Theorie elektr. Maschinen. (Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften Nr. 13.) 547 S. mit 328 Abb. Basel 1951. Verlag Birkhäuser. Preis geb. 74,90 schw. fr.

Dr. L. Locher-Ernst (Prof. am Technikum in Winterthur). Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven (Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus). 88 S. mit 168 Abb. Basel 1952. Verlag Birkhäuser. Preis brosch. 12,50 schw. fr.

H. M. Hansen (Prof. at the University of Michigan) and **P. P. Chenea** (Associate Prof. at the University of Michigan), Mechanic of Vibration. 417 S. mit 345 Abb. New York und London 1952. Wiley & Sons and Chapman & Hall. Preis 8 $.

Dr. H. Hermann, Übungen zur projektiven Geometrie (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe Band 18). 172 S. mit 90 Abb. und 4 zweifarbigen Raumbildern. Basel 1952. Verlag Birkhäuser. Preis geb. 17,— Fr. brosch. 14,— Fr.

G. Tintner (Prof. at the Jowa State College of Agrikulture an Mechanic Arts), Econometrics. XIII + 370 S. New York, London 1952. Wiley & Sons and Chapman & Hall. Preis 5,75 $.

Dr. Ing. Maria Esslinger, Statische Berechnung von Kesselböden, VIII + 100 S. mit 21 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952. Springer-Verlag. Preis kart. 10,50 DM.

Prof. Dr. O. Becker und **Prof. Dr. J. E. Hofmann**, Geschichte der Mathematik (Geschichte der Wissenschaften. II Naturwissenschaften). 340 S. Bonn 1951. Athenäum-Verlag. Preis geb. 10,— DM.

W. J. Duncan D. Sc., F. R. S. (Mech. Prof. in the University of Glasgow), The Principles of the Control and Stability of Airekraft (Cambridge aeronautical, Series I). XVI + 384 S. Cambridge 1952. University Press. Preis 40 s.

Dr. E. Broda (Dozent an der Universität Wien), Advances in Radiochemistry and in the Methods of Producing Radioelements by Neutron Irradiation (Cambridge Monographs on Physica). XI + 152 S. Cambridge 1950. University Press. Preis 15 s.

H. Bückner, Die praktische Behandlung von Integralgleichungen (Ergebnisse der angewandten Mathematik. Bd. I). VI + 127 S. mit 1 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg. 1952. Springer-Verlag. Preis brosch. 18,60 DM.

H. Hasse, Gaußsche Summen zu Normalkörpern über endlich-algebraischen Zahlkörpern. (Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik und allgemeine Naturwissenschaften, Jahrgang 1952, Heft 1). 20 S. Berlin 1952. Akademie-Verlag. Preis 2,35 DM.

F. Riegels, Die Strömung um schlanke, fast drehsymmetrische Körper (Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Nr. 5). 72 S. mit 12 Abb. und 4 Tabellen. Göttingen 1952. Selbstverlag Max-Planck-Institut für Strömungsforschung. Preis 7,— DM.

Dr. A. Vogel (Lehrbeauftragter an der TH. Stuttgart), Klassische Grundlagen der Analysis. X + 194 S. mit 17 Abb. Leipzig 1952. Verlag S. Hirzel. Preis kart. 8,50 DM.

Führer durch die technische Literatur, 39. Ausgabe. 178 S. Hannover 1952. Weidemanns Buchhandlung. Preis brosch. 2,— DM.

R. Rothe, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure (Teubners mathematische Leitfäden Bd. 21 bis 23). Teil I: Differentialrechnung und Grundformeln der Integralrechnung nebst Anwendungen. 10. Auflage, herausgeg. von Dr. W. Schmeidler (Prof. a. d. T. U. Berlin). 211 S. mit 161 Abb. Leipzig 1952. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. 6,30 DM.

Teil II: Integralrechnung, Unendliche Reihen. Vektorrechnung nebst Anwendungen. 8. Auflage herausgegeb. von Dr. W. Schmeidler (Prof. a. d. T. U. Berlin). 210 S. mit 98 Abb. Leipzig 1952, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. 5,60 DM.

Teil III: Flächen im Raume. Linienintegrale und mehrfache Integrale. Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen nebst Anwendungen. 5. Auflage, herausgeg. von Dr. W. Schmeidler (Prof. a. d. T. U. Berlin). 236 S. mit 167 Abb. Leipzig 1952. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. 5,80 DM.

H. Hasse (Prof. a. d. Universität Hamburg), Rein-arithmetischer Beweis des Siegelschen Endlichkeitssatzes für binäre diophantische Gleichungen im Spezialfall des Geschlechts 1. (Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Klasse für Mathematik und allgemeine Naturwissenschaft, 1951 Nr. 2). 19 S. Berlin 1952. Akademie-Verlag. Preis brosch. 2,— DM.

NACHRICHTEN

Kurt Beyer †.

In der Nacht vom 9. zum 10. Mai erlag der o. Prof. Dr. Kurt Beyer im einundsiebenzigsten Lebensjahre einem heimtückischen Leiden. Eine anfangs dieses Jahres vorgenommene Operation konnte ihm keine Heilung mehr bringen. Seit 1919 lehrte er als o. Professor der Technischen Mechanik und der Statik der Baukonstruktionen an der Techn. Hochschule Dresden. Vielen Generationen von Bauingenieuren hat er in ausgezeichneten Vorlesungen und Seminaren das wissenschaftliche Rüstzeug für ihren Beruf vermittelt. Darüber hinaus ist er durch seine Veröffentlichungen, besonders durch sein vielgebrauchtes, umfangreiches Werk „Die Statik des Eisenbetonbaues„ vielen Ingenieuren des In- und Auslandes Lehrer geworden. Er war Mitglied dreier Akademien, der Deutschen Akademie in Berlin, der sächischen Akademie in Leipzig und der Bauakademie in Berlin. Stets stand er in enger Fühlung mit der Praxis. Viele Bauten zeugen von seiner Tätigkeit, insbesondere hat er in den letzten Jahren zahlreiche große Förderanlagen für den Braunkohlentagebau geschaffen. 1945 stellte er sich als einer der ersten für den Wiederaufbau zur Verfügung. Bis vor kurzem hat er hier an leitender Stelle mitgearbeitet.

Der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik ist durch seinen Tod ein Mitarbeiter entrissen, der seit vielen Jahren Mitglied ihres wissenschaftlichen Beirates war und der für sie viele von hervorragender Sachkenntnis zeugende Referate geschrieben hat. Er war einer der Gründer der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. Wer das Glück hatte diesem aufrechten, äußerlich oft etwas rauhen, innerlich aber außerordentlich weichen Manne, der kaum von seinen großen Leistungen sprach, aber stets bereit war die Arbeiten anderer anzuerkennen, nahezustehen oder gar mit ihm zusammen arbeiten zu können, wird ihn nicht vergessen. Sein Werk wird weiterleben in den Leistungen seiner zahlreichen, vielfach in leitender Stellung tätigen Schüler.

Dresden. Willers.

Wissenschaftliche Gesellschaft für Luftfahrt (WGL)

Anläßlich der Luftfahrtwissenschaftlichen Tagung in Braunschweig fand am 21. 4. 52 eine ordentliche Mitgliederversammlung der 1912 gegründeten, 1935 aufgelösten und nunmehr wieder ins Leben gerufenen WGL statt. In den Vorstand wurden gewählt:

Prof. Dr. H. Blenk, Braunschweig, Sulzbacher Str. 30
als 1. Vorsitzender,

Prof. Dipl.-Ing. W. Blume, Düsseldorf, Fritz Wüststr. 12a
als stellvertr. Vorsitzender,

Flughafendirektor Sondermann, Braunschweig, Geysostr. 21
als stellvertr. Vorsitzender.

In den Vorstandsrat der WGL wurden außerdem 15 namhafte Fachleute aus der Luftfahrtwissenschaft und -technik gewählt.

Herr Prof. Dr. L. Prandtl, Göttingen, hat die ihm von der Mitgliederversammlung einstimmig angebotene Ehrenmitgliedschaft der WGL angenommen.

Ehemalige Mitglieder der WGL werden gebeten, ihre Mitgliedschaft zu erneuern. Interessierte Fachleute können als ordentliche Mitglieder, Firmen als außerordentliche Mitglieder aufgenommen werden.

Luftfahrtwissenschaftliche Tagung in Braunschweig vom 21. bis 23. 4. 52.

Veranstalter waren die TH Braunschweig, der Bezirksverein Braunschweig des VDI und die Ortsgruppe Braunschweig der Arbeitsgemeinschaft für Luftfahrttechnik (ALT) im VDI.

Folgende Vorträge wurden gehalten:

H. Koppe, Braunschweig: Luftfahrt — ein Menschheitsproblem,

H. Schlichting, Braunschweig: Entwicklung der Windkanäle,

F. Riegels, Göttingen: Das Widerstandsproblem,

B. Regenscheit, Aachen: Grenzschichtabsaugung,

E. W. Pleines, Braunschweig (verlesen durch R. Schulz, Düsseldorf): Schnellflug und Flugzeuggestaltung,

H. Winter, Braunschweig: Leichtbau und Leichtbauforschung im Flugzeugbau,

D. J. Lambert, London: Developments in the Design of Civil Aircraft,

E. Schmidt, Braunschweig: Grundlagen der Flugzeugantriebe,

K. Löhner, Braunschweig: Kolbentriebwerke,

K. von Gersdorf, Decize: Turbinenstrahltriebwerke,

O. Schrenk, Paris: Staustrahltriebwerke,

P. Ruden, Sceaux: Triebwerksaerodynamik,

E. Roessger, Freudenstadt: Neuzeitliche Ortungsverfahren.

Braunschweig. H. Blenk.

Feierlichkeiten in Belgien zum 100. Geburtstag von Junius Massau

Am 26. und 27. April 1952 gedachte das belgische Comité National de Mécanique (Sekretär Prof. F. H. van den Dungen) gemeinsam mit der Assocation des Ingénieurs sortis des Ecoles spéciales de Gand und der Société Belge des Mécaniciens in würdigen Feiern und einem von der Internationalen Union für Theoretische und Angewandte Mechanik (IUTAM) betreuten wissenschaftlichen Kolloquium des am 9. April 1852 in Gosselies geborenen, hervorragenden Vertreters der angewandten Mathematik und Mechanik Junius Massau (gest. 10. 2. 1909). Als Delegierte ihrer in der IUTAM zusammengeschlossenen nationalen Gesellschaften nahmen an den Veranstaltungen teil: J. W. Maccoll (England), J. Pérès und P. Germain (Frankreich), H. Görtler (Deutschland), J. Burgers und L. J. F. Broer (Holland), H. Solberg (Norwegen), H. Favre (Schweiz), W. Prager und W. Hayes (USA).

Der erste Tag brachte nach einer Besichtigung der Windkanäle des Laboratoire d'Aérodynamique in Rhode-St-Genèse einen Empfang im Rathaus von Gosselies mit anschließender Feier unter Teilnahme der Bevölkerung vor dem Geburtshaus von Massau, sodann einen Empfang im Rathaus von Mons und den ersten Teil des wissenschaftlichen Kolloquiums im großen Hörsaal der Faculté Polytechnique de Mons.

Am zweiten Tag fand in Gent eine akademische Feier in der Aula der Universität statt mit anschließendem Empfang im Rathaus der Stadt, sodann der zweite Teil des Kolloquiums in der Universität.

Die Themen der Kolloquiumsvorträge waren unter dem Gesichtspunkt gewählt worden, die Auswirkungen der Ideen Massaus auf den Gebieten der Vektoranalysis, der Methoden der graphischen Integration (insbesondere der partiellen Differentialgleichungen), der Gasdynamik, der Erdmechanik und Plastizität deutlich werden zu lassen. Es sprachen (in der Reihenfolge der Vorträge): Prager (Brown Univ.), Görtler (Univ. Freiburg i. Br.), Bouny (Faculté Polytechnique de Mons), Maccoll (Ministry of Supply, Sevenoaks, Kent, England), Hayes (Brown Univ.), Germain (Faculté de Poitiers), Broer (Univ. Delft). Die Vorträge sollen in Kürze veröffentlicht werden.

Als Anlaß der Feierlichkeiten erschien als stattlicher Band J. Massaus Werk „Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles" (aus den Annales des Ingénieurs des Ecoles de Gand, 1900—1904) verbunden mit seiner Arbeit „Note sur l'équation des cordes vibrantes" (1905), herausgegeben vom Comité National de Mécanique unter Leitung von F. H. van den Dungen. (Ein Exemplar wurde den Gästen als Festgabe überreicht.) Weitere der heute schwer zugänglichen Werke Massaus sollen demnächst folgen.

An den Feierlichkeiten waren etwa 150 Teilnehmer erschienen, an dem wissenschaftlichen Kolloquium dürften etwa 50 Fachleute teilgenommen haben. Die Organisation der Veranstaltungen war über alles Lob erhaben.

Freiburg/Br. H. Görtler.

Clausthal: Herr Dr. rer. nat. Fritz Weidenhammer habilitierte sich an der Bergakademie Clausthal für das Fach „Angewandte Mathematik und Mechanik".

Braunschweig: Herrn Professor Dr.-Ing. Vogelpohl ist die venia legendi für Maschinenelemente und Strömungslehre und Herrn Dr. rer. nat. Günther ist die venia legendi für Mechanik erteilt worden. Beide Herren sind Privatdozenten an der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Braunschweig.

Hannover: Prof. Dr. L. Collatz lehnte einen an ihn ergangenen Ruf auf den ord. Lehrstuhl für angew. Math. der TH. Karlsruhe ab.

Amsterdam: Am 9. Juli 1952 verstarb plötzlich Ir. C. Koning, wissenschaftlicher Direktor des Nationaal Luchtvaartlaboratorium in Amsterdam.

Herausgeber und Hauptschriftleiter: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin NW 7, Schiffbauerdamm 19, Fernsprecher Sammelnummer: 42 55 71. Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/32/10. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15,— zuzüglich Bestellgeld. Einzelheft DM 6,—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, andernfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1207 des Amtes für Literatur und Verlagswesen der Deutschen Demokratischen Republik. Satz und Druck: Druckerei „Thomas Müntzer" Werk Langensalza (57 275 4022) (1). Printed in Germany.